FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Elektrotechnika 1

Garant předmětu:
Doc. Ing. Lubomír Brančík, CSc.

Autor textu:
Doc. Ing. Lubomír Brančík, CSc.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

0 Úvod

Předložený studijní materiál slouží jako základní studijní materiál pro distanční formu studia předmětu *Elektrotechnika 1*. Spolu s dalšími základními předměty jako *Matematika 1*, *Fyzika 1* a *Počítače a programování 1* vytváří nezbytně nutné teoretické základy společné pro všechny elektrotechnické obory, které jsou potřebné k dalšímu studiu předmětů specializací ve vyšších ročnících studia.

0.1 Zařazení předmětu ve studijním programu

Předmět *Elektrotechnika 1* je zařazen v prvním semestru prvního ročníku bakalářského studia jako jeden ze základních teoretických předmětů společných pro všechny studijní obory. Spolu s dalšími základními předměty *Fyzika 1*, *Matematika 1* a *Počítače a programování 1* pomáhá vytvářet potřebný teoretický základ nezbytný pro další studium ve vyšších ročnících. Předmět *Elektrotechnika 1* staví na znalostech z fyziky a matematiky získané na střední škole, které dále rozvíjí, prohlubuje a rozšiřuje do oboru elektrotechniky. Vyrovnávat úroveň a skladbu středoškolských znalostí, získaných studiem na různých typech středních škol, pomáhá souběžně zařazený předmět *Elektrotechnický seminář*. Na předmět *Elektrotechnika 1* navazuje bezprostředně ve druhém semestru prvního stupně studia předmět *Elektrotechnika 2*, který základní teoretický kurs elektrotechniky završuje.

Vedle odborné teoretické průpravy je cílem předmětu *Elektrotechnika 1* rovněž poučení studentů o bezpečnostních předpisech nutných pro práci ve školních laboratořích, poskytování první pomoci při úrazu elektrickým proudem, ale také všeobecné poučení o bezpečnosti v elektrotechnice jakožto součásti jejich vysokoškolského vzdělání. Toto poučení je završeno přezkoušením a získáním elektrotechnického kvalifikačního stupně „pracovník poučený“ dle par. 4. vyhl. č. 50/1978 Sb. Studijní materiál *Bezpečnost v elektrotechnice* je samostatnou částí studijního textu předmětu *Elektrotechnika 1*.

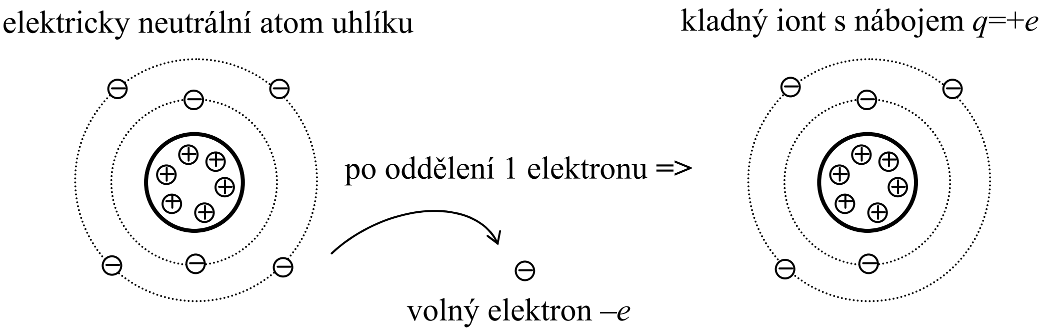
0.2 Úvod do předmětu

Předmět *Elektrotechnika 1* navazuje na znalosti středoškolské fyziky a matematiky, které dále rozvíjí, prohlubuje a rozšiřuje do oboru elektrotechniky. V první kapitole skript jsou shrnuty základní fyzikální jevy a zákony, na kterých obor elektrotechniky staví. Jsou zde osvětleny projevy elektricky nabité hmoty, jsou zavedeny základní pojmy, veličiny a jednotky užívané pro popis elektrického, magnetického a elektromagnetického pole. Ve druhé kapitole jsou probírány základní zákony elektrických obvodů, diskutovány jsou vlastnosti pasivních i aktivních ideálních obvodových prvků, včetně modelů prvků reálných. Jsou osvětleny rozdíly mezi prvky lineárními a nelineárními. Třetí kapitola skript je věnována základním metodám analýzy lineárních rezistorových obvodů. Jsou probírány jak metody pro speciální použití, tak metody univerzální, určené k řešení obvodů zejména za použití výpočetní techniky. Uvedeny jsou také některé důležité teorémy a principy, kterých je při analýze obvodů často využíváno. Ve čtvrté kapitole jsou probírány základy obvodů magnetických, včetně shrnutí nezbytných poznatků o magnetických vlastnostech látek. Diskutovány jsou různé metody jejich řešení, přičemž je uvedena souvislost s metodami řešení obvodů obecně nelineárních. Pátá kapitola skript je stručným úvodem do problematiky řešení obvodů s časově proměnnými proudy. Je provedena klasifikace časových průběhů veličin a jsou uvedeny základní charakteristiky užívané pro popis periodických i neperiodických průběhů. V příloze skript jsou pak tabulky vybraných veličin v elektrotechnice a jejich jednotek, včetně důležitých fyzikálních konstant.

1 Úvod do elektrotechniky

Cíle kapitoly: Kapitola si klade za cíl shrnout základní fyzikální jevy a zákony, na kterých je obor elektrotechniky vystavěn. Je vysvětleno, jak se projevuje elektricky nabitá hmota, jsou zavedeny základní pojmy, veličiny a jednotky, které jsou užívány pro popis elektrického, magnetického a elektromagnetického pole.

Elektrotechnika se zabývá elektrickými, magnetickými a elektromagnetickými jevy, jejichž příčinou je elektricky nabitá hmota, tj. hmota nesoucí kladný nebo záporný elektrický náboj. Elektrický náboj patří mezi základní vlastnosti elementárních částic hmoty a jeho množství označujeme jako q. Náboj nelze ani vytvořit ani zničit, platí zákon zachování náboje. Z tohoto zákona také vyplývá, že velikost náboje je nezávislá např. na pohybu nabité částice, na teplotě apod. Jak je známo z fyziky, každá hmota se skládá z molekul a molekuly z atomů prvků. Atomy jsou složeny z jádra a elektronového obalu. Kromě elektricky neutrálních neutronů je v jádře také určitý počet protonů, který určuje zařazení prvku do periodické soustavy. Protonům připisujeme kladný elektrický náboj $q=+e$. Kolem jádra pak obíhají **elektrony** se záporným elektrickým nábojem $q=-e$. Protože se náboje jádra a elektronového obalu vzájemně vyrovnávají, jeví se atom navenek jako elektricky neutrální. Elektrony je však možno působením vhodných sil z atomu uvolnit a použít jich jako **volných elektrických nábojů.** Hmota elektricky neutrální tedy obsahuje stejný počet protonů a elektronů. Hmota záporně nabitá má přebytek elektronů, hmota kladně nabitá má elektronů méně než odpovídá neutrálnímu stavu. Zatímco záporný náboj je zpravidla tvořen elektrony, kladný náboj je tvořen kladnými ionty, které vzniknou oddělením určitého počtu tzv. valenčních elektronů. Jako příklad můžeme uvažovat model atomu uhlíku na **Obr. 1.1**.



$$q=\sum_{i=1}^{12} q_i = +6e-6e=0 \qquad\qquad q=\sum_{i=1}^{11} q_i = +6e-5e=+e$$

Obr. 1.1: Model atomu uhlíku

Jako celek je příroda elektricky neutrální. Tato představa vede k závěru, že každému kladnému elektrickému náboji odpovídá na jiném místě stejně veliký záporný elektrický náboj – tzv. korespondující náboje. Nejmenší elektrický náboj je náboj jednoho elektronu. Všechny elektrické náboje, se kterými se setkáme, jsou pak dány celistvým násobkem tohoto tzv. **elementárního náboje**. Jednotkou elektrického náboje je jeden coulomb [C], který je roven $6{,}24151.10^{18}$ elementárních nábojů, resp. jeden elementární náboj je roven $1{,}602177.10^{-19}$ C.

Děje v prostoru, kde působí elektrické náboje, mohou být velmi složité. Obecně jsou matematicky popsány soustavou tzv. **Maxwellových rovnic**. Hovoříme o rovnicích **elektromagnetického pole**. Protože řešení Maxwellových rovnic vyžaduje pokročilé znalosti matematických metod a v obecném případě je velmi obtížné, snažíme se, pokud je to možné, situaci zjednodušit a nepodstatné rysy jevů zanedbat. Pak rozlišujeme zvláštní případy elektromagnetického pole, a to **pole elektrické** a **pole magnetické.**

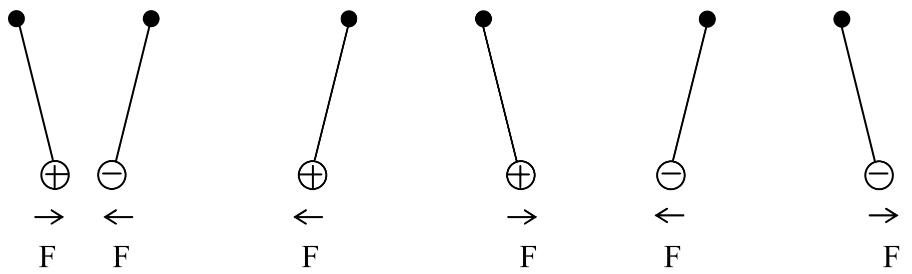
1.1 Elektrické pole

Elektrické náboje nacházející se v daném prostoru se projevují svými silovými účinky. Protože se jedná o síly **elektrické** povahy, říkáme, že v prostoru působí **elektrické pole**. Elektrické pole vytvořené konstantními (v čase i prostoru) elektrickými náboji se nazývá pole **elektrostatické**. Přitom tyto náboje mohou být izolované nebo mohou být usazeny na povrchu vodivých těles, tzv. **elektrod**. Nejjednodušší situaci, kdy na sebe působí dva bodové náboje o velikostech q_1 a q_2, popisuje **Coulombův zákon** (formulovaný v letech 1785–89 francouzským badatelem C. A. Coulombem)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{d^2} \quad . \qquad (1.1)$$

Zde F je velikost síly [N] a d je vzdálenost nábojů [m]. Konstanta $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$ je závislá na vlastnostech prostředí a nazývá se **permitivita**. Je dána součinem fyzikální konstanty $\varepsilon_o = 8{,}854188.10^{-12}$ [Fm^{-1}], které se říká **permitivita vakua,** a bezrozměrné **relativní** permitivity ε_r.

Síla je **přitažlivá** v případě nábojů různého znaménka a **odpudivá** v případě nábojů znaménka shodného, jak je schematicky znázorněno na **Obr. 1.2**.



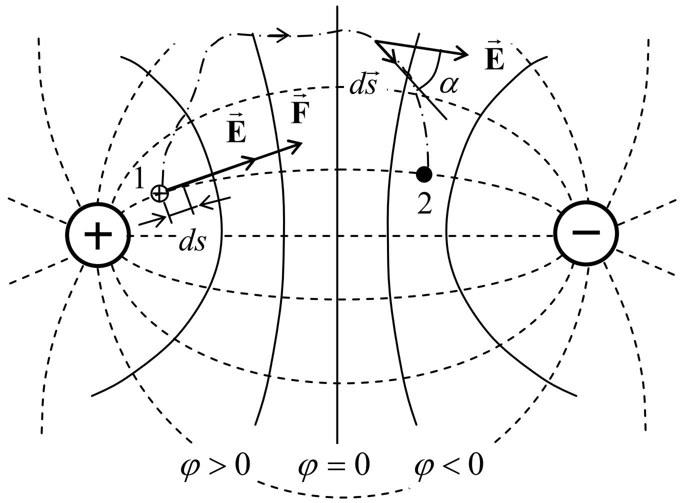
Obr. 1.2: Silové působení mezi bodovými náboji

Elektrické pole můžeme pozorovat např. tak, že do něj umístíme **zkušební náboj** (tak malý, aby sám neměl na pole prakticky žádný vliv) a zjišťujeme velikost a směr síly, která na tento náboj působí. Sílu znázorníme **vektorem**. Obecně je síla v každém bodě jiná a proto úplný popis rozložení pole pomocí vektorů sil v jednotlivých bodech by byl málo přehledný. Obraz pole proto znázorňujeme pomocí **siločar**. Jsou to čáry sledující dráhu (trajektorii), po které se pohybuje zkušební náboj, je-li zcela uvolněn a působí-li na něj pouze síly pole. Jako příklad může posloužit elektrostatické pole dvou kulových nábojů stejné velikosti podle **Obr. 1.3**.

Ukazuje se, že velikost síly je úměrná velikosti zkušebního náboje. Definujeme proto **intenzitu elektrického pole** $\vec{E}$ jako podíl síly a kladného zkušebního náboje

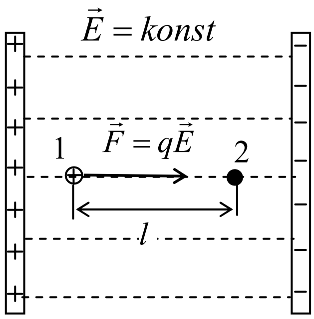
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad . \qquad (1.2)$$

Intenzita je tedy vektor mající směr síly $\vec{F}$ a její velikost již na velikosti q nezávisí, jak je opět zřejmé z **Obr. 1.3**. Jednotkou intenzity elektrického pole je [Vm^{-1}].



Obr. 1.3: Elektrostatické pole dvou kulových nábojů

Elektrostatické pole podle **Obr. 1.3** je pole tzv. **nehomogenní**, neboť vektory $\vec{E}$ mají v každém bodě jiný směr i velikost. Příkladem elektrostatického pole **homogenního** je pole mezi dvěma dlouhými rovnoběžnými deskami podle **Obr. 1.4**.



Obr. 1.4: Elektrostatické pole mezi dvěma deskami

Vektory pole jsou místní (lokální) veličiny, kdy pro popis účinků pole v určitém objemu bylo třeba vyšetřit jejich prostorové rozložení. Abychom se tomu vyhnuli, je vhodné vycházet z **veličiny integrální**, totiž z práce vektoru po určité dráze. Pro popis pole v určitém objemu tak můžeme zavést **skalární veličiny**, jako je **elektrické napětí** a **potenciál**. Napětí mezi dvěma body 1 a 2 je rovno poměru práce A [J] vykonané silami elektrického pole k velikosti přemístěného kladného náboje q

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \frac{1}{q}\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad . \qquad (1.3)$$

Jednotkou napětí je volt [V]. Jak je známo z fyziky, **skalární součin** vektorů lze vyjádřit jako součin jejich velikostí a kosinu úhlu mezi nimi, tedy $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E.ds.\cos\alpha$, viz **Obr. 1.3**. Uvážíme-li homogenní elektrické pole podle **Obr. 1.4**, a zvolíme-li za integrační dráhu siločáru, obdržíme ze vztahu (1.3) jednoduchý výraz $U_{12} = E.l$, kde l je vzdálenost bodů 1 a 2. Odtud je také ihned zřejmá jednotka intenzity elektrického pole [Vm^{-1}]. V obecném případě napětí U_{12} závisí nejen na poloze bodů 1 a 2, ale také na integrační dráze, v poli potenciálním (jakým je pole elektrostatické) je však na integrační dráze nezávislé.

Pro vyznačení smyslu napětí používáme tzv. **čítací šipku** napětí, která vlastně určuje směr postupu integrace od bodu 1 k bodu 2. Změna směru čítací šipky se vyznačuje záměnou pořadí číslic v indexu napětí, z rovnice (1.3) pak vyplývá $U_{12} = -U_{21}$, viz **Obr. 1.5**.

Obr. 1.5: Čítací šipky napětí

Pokud je napětí funkcí času, která nabývá kladných i záporných hodnot, je skutečný smysl totožný se smyslem vyznačeným v tom časovém úseku, kdy funkce *u(t)* nabývá kladných hodnot.

Potenciál bodu v poli je **úměrný práci**, kterou musíme vynaložit, abychom dopravili kladný zkušební náboj do daného místa z místa, jehož potenciál pokládáme za nulový. Značí se řeckým písmenem φ a měří opět ve voltech [V]. Obecně lze hladinu nulového potenciálu volit libovolně, např. na **Obr. 1.3** je za ni zvolena rovina souměrnosti stejně velikých korespondujících nábojů. V praxi se **bod nulového potenciálu** (tzv. **referenční bod**) uvažuje obvykle na povrchu Země, u konkrétního elektrického zařízení je to pak povrch kovové skříně, ve které je zařízení instalováno. V případě elektrostatického pole vytvořeného izolovaným nábojem se za bod nulového potenciálu považuje korespondující náboj umístěný v nekonečnu. Pro získání názorné představy o rozložení pole spojujeme body stejného potenciálu do tzv. **ekvipotenciálních ploch**, na **Obr. 1.3** naznačeny plnými čarami. Potom siločáry popisující pole vycházejí z ekvipotenciálních ploch kolmo. Podle definice lze tedy potenciály bodů 1 a 2 vyjádřit jako

$$\varphi_1 = -\frac{1}{q}\int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_0^1 \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad , \qquad (1.4)$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{q}\int_0^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_0^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad , \qquad (1.5)$$

kde dolní integrační mez označuje bod nulového potenciálu. Ze vztahů (1.3), (1.4) a (1.5) je dále zřejmé, že napětí mezi dvěma body nebo ekvipotenciálními plochami lze vyjádřit také jako rozdíl potenciálů

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad . \qquad (1.6)$$

Jestliže elektrodu umístěnou izolovaně v nevodivém prostředí nabijeme nábojem Q, povrch elektrody je ekvipotenciální plochou a má napětí $U = \varphi$. Definujeme **kapacitu** elektrody jako

$$C = \frac{Q}{U} \qquad (1.7)$$

a měříme ji ve faradech [F]. Častější je případ, kdy použijeme dvou elektrod, z nichž jednu nabijeme nábojem Q a druhou nábojem $-Q$, jak je tomu např. na **Obr. 1.4**. Taková konfigurace se nazývá **kondenzátor** (**kapacitor**). **Kapacita kondenzátoru** je opět definována dle (1.7) jako podíl náboje Q a napětí mezi elektrodami U. Velikost kapacity závisí na geometrických rozměrech elektrod a materiálových vlastnostech prostředí mezi nimi a obecně se stanovuje řešením příslušného elektrického pole. Tak např. pro deskový kondenzátor s plochou elektrod S a vzdáleností mezi nimi d, viz **Obr. 1.4**, je kapacita rovna

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \quad . \tag{1.8}$$

Při umisťování nábojů na elektrodách (nabíjení kondenzátoru) byla vynaložena práce, která je nyní v kondenzátoru akumulována ve formě **energie elektrického pole**

$$W_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 \quad . \tag{1.9}$$

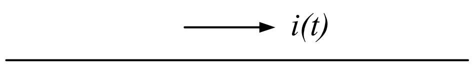
Tato energie může být později z kondenzátoru opět odebrána.

Až dosud jsme předpokládali, že náboje v poli jsou konstantní a nepohyblivé. Jestliže se však náboje s časem mění nebo pohybují, představují **elektrický proud**. Proud pak definujeme jako **rychlost změny náboje**

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1.10}$$

a měříme jej v ampérech [A]. I když se s veličinou dq pracuje z matematického hlediska jako s nekonečně malou, z hlediska fyzikálního musí obsahovat dostatečně velký počet nabitých částic, aby mohla být považována za spojitou funkci času (definice vychází z tzv. makroskopické teorie elektromagnetického pole).

Proud je skalární veličinou, jejíž kladný smysl ztotožňujeme se smyslem pohybu kladných nábojů. Tento tzv. **konvenční směr** elektrického proudu má původ v počátcích nauky o elektřině, kdy nebyla dostatečně známa struktura hmoty, a byl zvolen právě naopak než je smysl pohybu elektronů tvořících proud ve vodičích. Kladný smysl proudu vyznačujeme pomocí **čítací šipky** proudu, viz **Obr. 1.6**

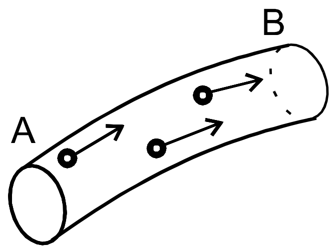


Obr. 1.6: Čítací šipka proudu

Pokud je proud funkcí času, která nabývá kladných i záporných hodnot, je skutečný smysl totožný s vyznačeným v tom časovém úseku, kdy funkce *i(t)* nabývá kladných hodnot.

Část prostoru, ve které dochází k pohybu volných nábojů, vytváří **vodivý kanál**, hovoří se také o **proudovém poli**. Příklad takového kanálu je nakreslen na **Obr. 1.7**. Kanál je na jedné straně omezen plochou A, na druhé plochou B. Zjistíme, že potenciál bodů na obou koncích kanálu se liší, ve směru toku elektrického proudu dochází k úbytku potenciálu. Tento úbytek je přímo úměrný velikosti proudu

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = R.i \quad . \tag{1.11}$$



Obr. 1.7: Vodivý kanál

Konstanta úměrnosti R se nazývá **elektrický odpor** a měří se v ohmech [Ω]. Uvedený vztah vyjadřuje **Ohmův zákon** (nalezený německým badatelem G. S. Ohmem v r. 1825). Velikost odporu závisí na geometrických rozměrech a materiálových vlastnostech prostředí a dá se stanovit řešením příslušného proudového pole. Nejčastější je případ, kdy má kanál konstantní průřez S po celé své délce l. Pak pro odpor R platí

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad . \tag{1.12}$$

Velikost odporu je tedy přímo úměrná délce kanálu l a nepřímo průřezu S. Prostředí je charakterizováno **měrným (specifickým) odporem** ρ [Ωm]. Nutným předpokladem pro platnost Ohmova zákona je však **linearita prostředí**, tj. nezávislost měrného odporu na velikosti proudu i. Vedle elektrického odporu definujeme také **elektrickou vodivost**, s jednotkou siemens [S], jako

$$G = \frac{1}{R} \quad . \tag{1.13}$$

Při průtoku proudu vodivým kanálem dochází k nevratné přeměně elektrické energie v jinou formu, např. v energii tepelnou nebo světelnou. Předpokládejme, že se mezi místy s napětím u_{AB} přenesl náboj dq během časového intervalu dt. Dle (1.3) je vykonaná práce $dA = u_{AB} dq$ a definujeme **okamžitou hodnotu výkonu** jako rychlost změny práce

$$p = \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dq}\frac{dq}{dt} = u_{AB}.i \quad , \tag{1.14}$$

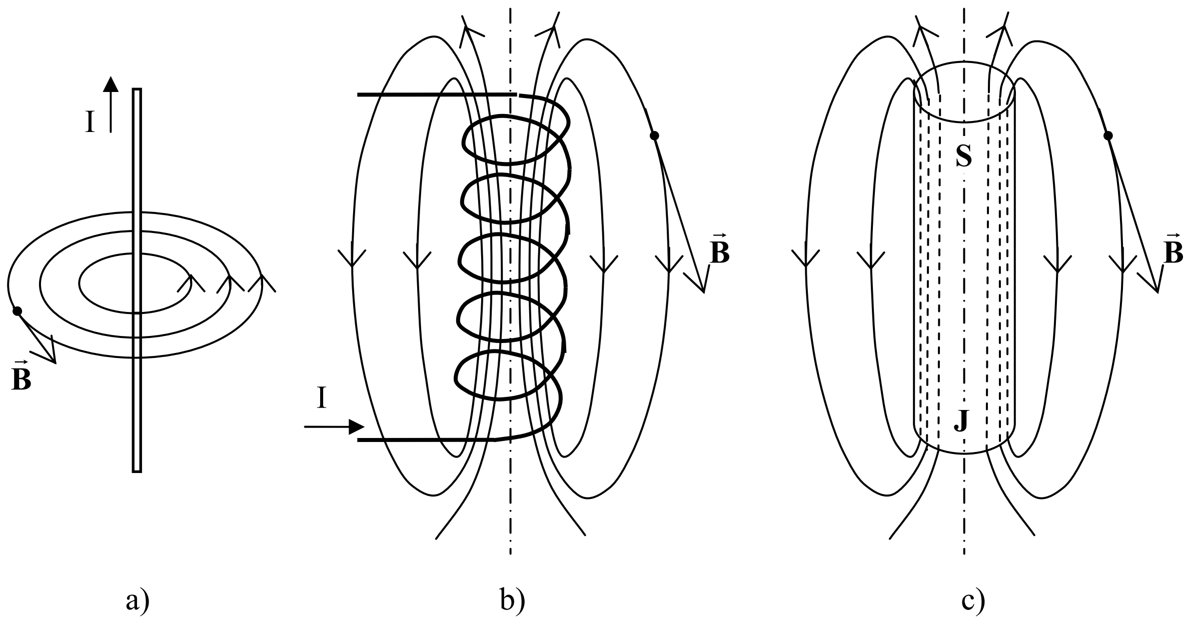
s jednotkou watt [W]. Pro **lineární prostředí** lze aplikací Ohmova zákona dále psát

$$p = \frac{u_{AB}^2}{R} = R.i^2 \quad . \tag{1.15}$$

1.2 Magnetické pole

Jak jsme poznali v kap. 1.1 v okolí elektrického náboje v klidu je buzeno elektrostatické pole. Jsou-li ovšem elektrické náboje v pohybu, tj. existuje-li v daném prostředí **elektrický proud**, je buzeno také **magnetické pole**. Toto pole je neoddělitelným průvodním jevem elektrického proudu: neexistuje elektrický proud, který by nevytvářel ve svém okolí magnetické pole a naopak neexistuje magnetické pole, které by nebylo buzeno elektrickým proudem. Znamená to např. i to, že také magnetické pole tzv. permanentních magnetů je buzeno proudy – v tomto případě elementárními proudy uvnitř atomů.

Magnetické pole se projevuje **silovými účinky** na jiné vodiče protékané elektrickým proudem, na pohybující se náboje nebo na jiné magnety. Základní veličinou magnetického pole, pomocí které se tyto silové účinky posuzují, je **magnetická indukce** $\vec{B}$. Jednotkou magnetické indukce je tesla [T]. Magnetická indukce je vektorová veličina, má proto v každém bodě prostoru svoji velikost, směr a orientaci. Graficky ji lze znázornit **indukčními čarami**. Jsou to čáry, na kterých tečna v libovolném bodě určuje směr magnetické indukce. Na **Obr.** 1.8 jsou znázorněny indukční čáry pro magnetické pole dlouhého přímého vodiče, cívky ve tvaru tzv. solenoidu a válcového permanentního magnetu. Jak je z obrázků patrné, indukční čáry magnetického pole jsou křivky uzavřené a obepínají proud, kterým jsou buzeny. Magnetické pole je tedy **nezřídlové**, tzn. že jeho indukční čáry nikde nezačínají ani nekončí. To je rozdíl oproti poli elektrostatickému, jehož siločáry začínají na kladných a končí na záporných nábojích (elektrické náboje jsou tedy **zřídly** elektrostatického pole).



Obr. 1.8: Indukční čáry magnetického pole

Ačkoliv se může zdát, že v případě permanentního magnetu (**Obr.** 1.8**c**) začínají indukční čáry na jeho „**severním pólu**“ a končí na „**pólu jižním**“ (že nejsou uzavřeny), ve skutečnosti mají své pokračování vnitřkem magnetu a jsou spjaty s elementárními proudy uvnitř atomů.

Směr indukčních čar magnetického pole dlouhého přímého vodiče (**Obr. 1.8a**) lze určit podle **Ampérova pravidla pravé ruky** pro vodič: ukazuje-li palec pravé ruky položené dlaní na vodič směr proudu ve vodiči, ukazují ohnuté prsty směr magnetického pole.

Směr indukčních čar uvnitř solenoidu (**Obr. 1.8b**) lze určit **Ampérovým pravidlem pravé ruky** pro cívku: uchopí-li se cívka pravou rukou tak, aby prsty ukazovaly směr proudu v závitech, ukazuje natažený palec směr magnetického pole uvnitř cívky.

Síla působící v magnetickém poli **na pohybující se náboj** je úměrná velikosti náboje q a vektorovému součinu rychlosti náboje a magnetické indukce v daném bodě

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}] \quad . \qquad (1.16)$$

Síla $\vec{F}$ má směr kolmý k rovině vymezené vektory $\vec{v}$ a $\vec{B}$, orientace je určena pravidlem „pravotočivého šroubu“, velikost je dána vztahem $F = q.v.B.\sin\alpha$, jak je znázorněno na **Obr.** 1.9**a**. Vztah (1.16) popisuje např. situaci silového působení na volný elektron uvnitř obrazové elektronky nebo elektronového mikroskopu.

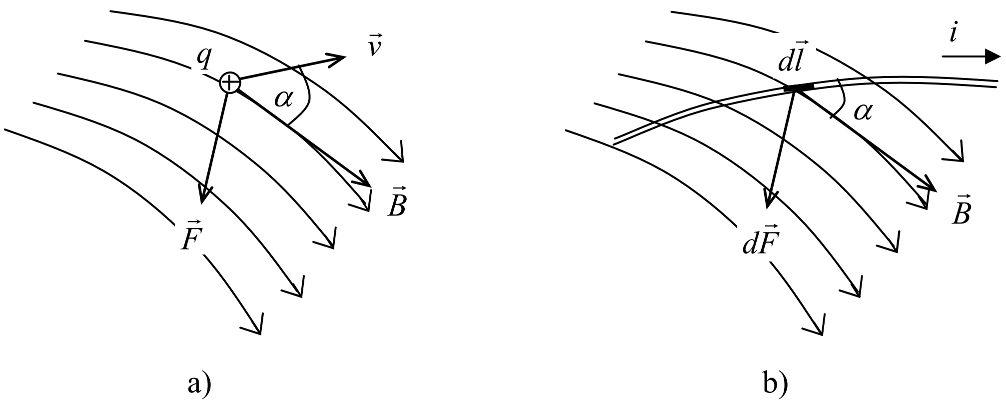
Lze také vyjádřit sílu působící na **element vodiče** $d\vec{l}$ **protékaného proudem** i jako

$$d\vec{F} = i[d\vec{l} \times \vec{B}] \quad , \qquad (1.17)$$

kde bylo do vztahu (1.16) dosazeno $\vec{v} = d\vec{l}/dt$ a $dq = i.dt$ (v elementu vodiče dl je totiž uvažován náboj dq), viz **Obr.** 1.9**b** . Síla, která působí na celý proudovodič délky l, je pak rovna integrálu (1.17) přes tuto délu, tj.

$$\vec{F} = i\int_l (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad . \qquad (1.18)$$

Tento vztah se může uplatnit např. při vyšetřování silového působení v elektrických motorech nebo v ručkových měřicích přístrojích.

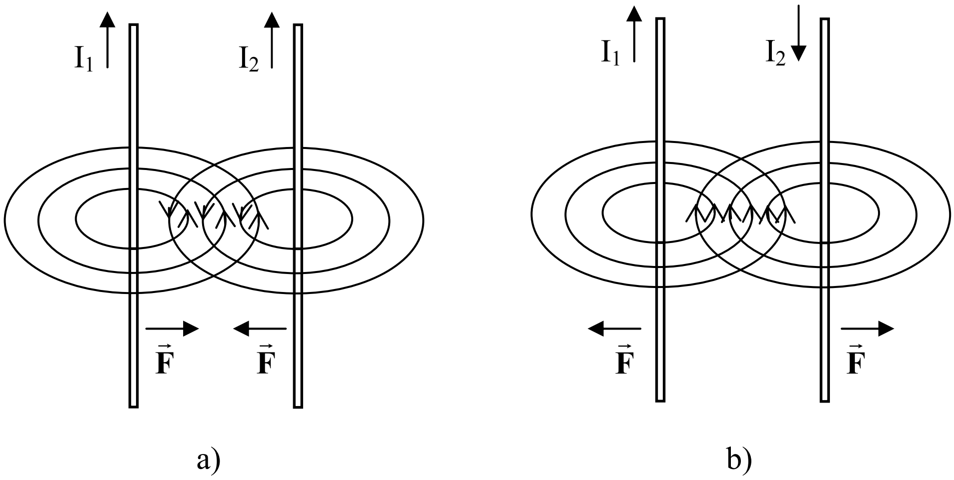


Obr. 1.9: Silové působení magnetického pole

Uvažujeme-li navíc vodič přímý a magnetické pole homogenní, dostáváme z rovnice (1.18) pro velikost síly $F = Bli\sin\alpha$. V praxi je konstrukční uspořádání elektrických strojů voleno tak, aby se při daném proudu dosáhlo co největších silových účinků. To je splněno, je-li přímý vodič kolmý na indukční čáry. Velikost síly je pak rovna $F = Bli$.

Směr síly, kterou magnetické pole působí na vodič protékaný proudem, se dá také určit podle **Flemingova pravidla levé ruky**: položíme-li levou ruku na vodič tak, aby prsty ukazovaly směr proudu a indukční čáry vstupovaly do dlaně, ukazuje natažený palec směr síly. Je dobré si pamatovat fyzikální skutečnost, že vodič s proudem je vytlačen ze zesíleného magnetického pole do pole zeslabeného. Proud vodiče totiž budí své vlastní magnetické pole (**Obr. 1.8.8a**), které se vektorově sčítá s magnetickým polem původním, což vede k deformaci výsledného magnetickéhom pole.

Z téhož důvodu na sebe budou silově působit také dva vodiče protékané proudem. Příklad je uveden na **Obr. 1.10**. Dvěma dlouhými rovnoběžnými vodiči protéká stejnosměrný ustálený proud: jednou souhlasným směrem (**Obr. 1.10a**), pak nesouhlasným směrem (**Obr. 1.10b**).



Obr. 1.10: Elektrodynamické síly mezi dvěma vodiči

Z obrázků je patrné, že jako důsledek vzájemného směru indukčních čar (orientace vektorů magnetické indukce) je při souhlasné orientaci proudů výsledné magnetické pole mezi vodiči zeslabováno, zatímco na odlehlých stranách vodičů zesilováno – vodiče se proto přitahují. V případě nesouhlasné orientace proudů ve vodičích je tomu právě naopak – vodiče se budou odpuzovat. Silám, které působí mezi vodiči, se říká **elektrodynamické síly**.

Další veličinou charakterizující magnetické pole je **intenzita magnetického pole** $\vec{H}$, s jednotkou [Am^{-1}]. Vztah k magnetické indukci je dán rovnicí

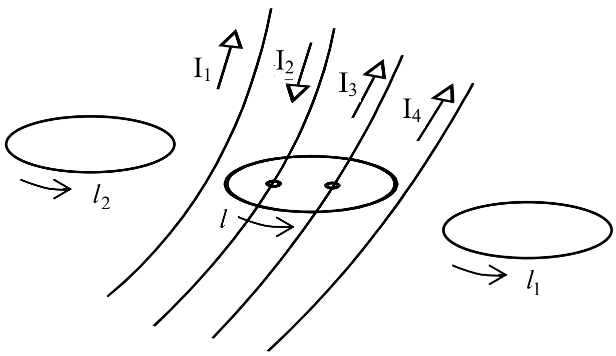
$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_o \mu_r \vec{H} \quad , \tag{1.19}$$

kde μ je **magnetická permeabilita**, μ_r relativní permeabilita prostředí, μ_o permeabilita vakua ($\mu_o = 4\pi.10^{-7}$ [Hm^{-1}]), která je podobně jako ε_0 fyzikální konstantou. Intenzita magnetického pole závisí na velikosti proudů, které magnetické pole vytvořily.

Kvantitativní vztah mezi magnetickým polem a proudem, který toto pole budí, je dán **Ampérovým zákonem celkového proudu**, zvaným taktéž jako **věta o obvodovém napětí v magnetickém poli**: integrál intenzity magnetického pole braný podél uzavřené křivky l – magnetické obvodové napětí – je roven algebraickému součtu proudů, které protékají plochou ohraničenou touto křivkou (**Obr. 1.11**)

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I \quad . \tag{1.20}$$

Přitom se za kladné považují ty proudy, které jsou se zvoleným směrem oběhu spjaty podle Ampérova pravidla pravé ruky. V příkladu na **Obr. 1.11** je proto $\sum I = -I_2 + I_3$, proudy I_1 a I_4 se neuplatní, neboť prochází mimo plochu ohraničenou křivkou l.



Obr. 1.11: K vysvětlení celkového spjatého proudu

V případě osamoceného vodiče podle **Obr. 1.8a** je zřejmě $\sum I = I$, je-li za integrační dráhu zvolena jedna z indukčních čar a směr integrace souhlasí s orientací vektoru magnetické indukce. Podobně je tomu pro cívku podle **Obr.** 1.8**b**, kdy ovšem $\sum I = NI$, kde N je počet závitů cívky. V tomto případě totiž proud I prochází plochou ohraničenou indukční čarou (která je zvolena za integrační dráhu) v témže směru právě tolikrát, kolik má cívka závitů. Pro integrační dráhy, se kterými není spjat žádný proud, jako např. pro uzavřené křivky l_1 a l_2 na **Obr. 1.11**, je magnetické obvodové napětí rovno nule, tj. $\oint_{l_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{l_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$. Protože je vodič či cívka s proudem zdrojem magnetického pole, byla pravá strana rovnice (1.20) nazvána na základě analogie s elektrickými obvody jako **magnetomotorické napětí**. **Z**načí se F_m a jednotkou je ampér. Magnetické napětí se pak analogicky značí U_m.

Je-li tedy znám průběh intenzity magnetického pole podél vhodně zvolené uzavřené integrační dráhy, je možné podle rovnice (1.20) určit potřebný celkový spjatý proud. Toho se často využívá např. při řešení **magnetických obvodů**, viz dále kap. 4, kdy lze za jistých zjednodušujících předpokladů zvolit za integrační dráhu tzv. střední indukční čáru. Na ní se pak uvažuje intenzita magnetického pole stálá co do velikosti, čímž se dané řešení zjednoduší.

Naopak je možné v některých jednoduchých případech určit podle rovnice (1.20) intenzitu magnetického pole pro zadanou hodnotu proudu, viz ***Příklad 1.1***.

Příklad 1.1

Vypočítejte intenzitu magnetického pole $\vec{H}$ vně i uvnitř přímého vodiče kruhového průřezu o poloměru *a*, kterým protéká stejnosměrný ustálený proud I.

V okolí vodiče vznikne válcově symetrické magnetické pole s magnetickou indukcí $\vec{B}$ a intenzitou magnetického pole $\vec{H}$, viz **Obr. 1.12**.

a) b)

Obr. 1.12: K výpočtu magnetického pole vně a uvnitř vodiče

a) Případ **vně vodiče** ($r > a$), viz **Obr. 1.12a**:

Za integrační dráhu volíme kružnici o poloměru *r* vně vodiče (indukční čára). Intenzita $\vec{H}$ má podél takové integrační dráhy stálou velikost a má směr elementu dráhy $d\vec{l}$. Rovnice (1.20) se proto zjednoduší a můžeme psát

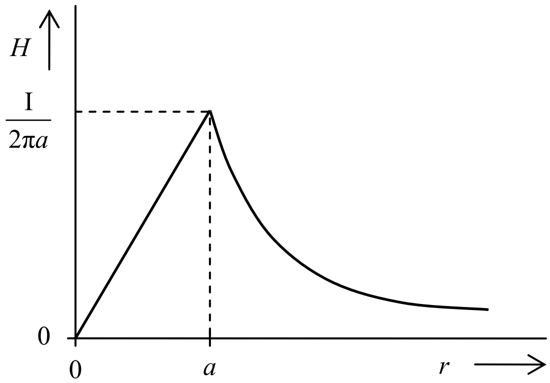
$$H \cdot 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}.$$

b) Případ **uvnitř vodiče** ($r < a$), viz **Obr. 1.12b**:

Za integrační dráhu volíme kružnici o poloměru *r* uvnitř vodiče. Oblastí vodiče ohraničené touto kružnicí, jejíž plocha je rovna $S' = \pi r^2$, protéká pouze část celkového proudu $I' = \sigma S'$, kde $\sigma = I/S$ je proudová hustota, $S = \pi a^2$ je plocha průřezu vodiče. Po dosazení dostáváme

$$H \cdot 2\pi r = I' = I\frac{r^2}{a^2} \Rightarrow H = \frac{Ir}{2\pi a^2}.$$

Intenzita magnetického pole je na ose vodiče nulová, směrem k povrchu se zvyšuje lineárně a dosahuje zde svého maxima, směrem od povrchu pak ubývá podle hyperboly, viz Obr. 1.13.

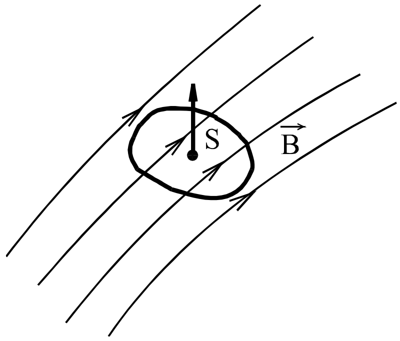


Obr. 1.13**:** Intenzita magnetického pole vně a uvnitř vodiče

Kvantitativní mírou magnetického pole prostupujícího určitou plochou (např. průřezem jádra transformátoru, cívkou elektrického stroje, vzduchovou mezerou elektromagnetu apod.) je **magnetický tok** Φ. Je definován jako tok vektoru magnetické indukce plochou

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (1.21)$$

a jeho jednotkou je weber [Wb], viz **Obr. 1.14**.



Obr. 1.14: Tok vektoru magnetické indukce plochou

Vzhledem ke vztahu (1.21) můžeme magnetickou indukci pokládat také za vektor **plošné hustoty magnetického toku**. Pro její velikost dostáváme

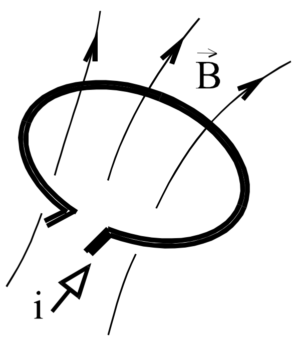
$$B = \frac{d\Phi}{dS\cos\alpha} = \frac{d\Phi}{dS_n} \;, \qquad (1.22)$$

kde α je úhel mezi vektory magnetické indukce $\vec{B}$ a plošného elementu $d\vec{S}$, dS_n je pak průmět plošného elementu dS do roviny kolmé ke směru magnetické indukce.

Vztah (1.21) platí obecně pro nehomogenní magnetické pole. V technických aplikacích se snažíme docílit zpravidla pole homogenního (nebo je alespoň za takové v přijatelných mezích nepřesnosti pokládáme). V takovémto případě je složka magnetické indukce ve směru normály konstantní po celé ploše *S*. Je-li navíc plocha S kolmá ke směru magnetické indukce (tj. úhel $\alpha = 0$), dostáváme pro magnetický tok zjednodušený (v praxi často užívaný) vztah

$$\Phi = BS \;. \qquad (1.23)$$

Jestliže vytvoříme z vodiče smyčku podle **Obr.** 1.15 a necháme jí protékat proud *i*, kolem vodiče se vytvoří magnetické pole a plochou smyčky bude protékat magnetický tok Φ.



Obr. 1.15: K definici indukčnosti smyčky

Potom definujeme **indukčnost smyčky** L jako podíl magnetického toku a proudu, který tento tok vytvořil

$$L = \frac{\Phi}{i} \quad . \tag{1.24}$$

Indukčnost měříme v jednotkách henry [H].

Budeme-li uvažovat **cívku** o N závitech (např. podle **Obr. 1.8b**), je její indukčnost rovna

$$L = \frac{\Psi}{i} \quad , \tag{1.25}$$

kde tzv. spřažený (spjatý, cívkový) magnetický tok je roven

$$\Psi = \sum_{k=1}^{N} \Phi_k \quad . \tag{1.26}$$

Jde o součet magnetických toků procházejících plochami všech závitů cívky. Při zanedbání rozptylu a při stejné ploše všech závitů lze poslední vztah dále zjednodušit na

$$\Psi = N\Phi \quad . \tag{1.27}$$

Obecně závisí velikost indukčnosti na uspořádání vodičů, geometrických rozměrech a materiálových vlastnostech prostředí a dá se stanovit řešením příslušného magnetického pole. Tak např. indukčnost cívky s počtem závitů N a uzavřeným jádrem délky l a průřezu S, za předpokladu homogenního magnetického pole v jádře, je dána vztahem

$$L = \mu_0 \mu_r N^2 \frac{S}{l} \quad . \tag{1.28}$$

Energie akumulovaná v magnetickém poli je dána energií potřebnou na vytvoření tohoto magnetického pole a je rovna

$$W_m = \frac{1}{2}\Psi i = \frac{1}{2} L i^2 \quad . \tag{1.29}$$

Nyní vezměme podobnou smyčku jako na **Obr. 1.15** a vložme ji do magnetického pole. Je-li pole časově proměnné, naměříme mezi konci smyčky **elektrické napětí** rovné **rychlosti změny magnetického toku** protékajícího plochou smyčky

$$u_i(t) = \frac{d\Phi}{dt} \quad . \tag{1.30}$$

Tento tzv. **indukční zákon** (formulovaný v r. 1831 anglickým vědcem M. Faradayem) platí bez ohledu na to, zda magnetické pole bylo vytvořeno vnějšími příčinami nebo zda šlo o pole vyvolané proudem protékajícím smyčkou.

Docházíme k důležitému poznatku, že časově proměnný elektrický proud vytvoří časově proměnné magnetické pole. Na druhé straně časově proměnné magnetické pole indukuje časově proměnné elektrické napětí, které v důsledku může opět vyvolat průtok časově proměnného elektrického proudu. Proto při změnách proudu, napětí, elektrického náboje nebo magnetického toku nemůžeme elektrické pole oddělit od pole magnetického. Hovoříme pak o poli elektromagnetickém a pole elektrické nebo magnetické bereme pouze jako jeho zvláštní případy.

1.3 Elektromagnetické pole

Poznali jsme, že elektrické a magnetické pole spolu úzce souvisí. Obě pole vznikají působením elektrického náboje, přičemž pro vznik elektrického pole stačí pouhá existence tohoto náboje, magnetické pole vzniká jeho pohybem. Zobecněním těchto souvislostí dospíváme k poli elektromagnetickému. Základem obecného popisu elektromagnetického pole jsou čtyři tzv. **Maxwellovy rovnice** (poprve uveřejněné v r. 1873 skotským vědcem J. C. Maxwellem, později novým způsobem matematicky formulované anglickým vědcem O. Heavisidem), ke kterým se zpravidla připojuje **zákon o zachování elektrického náboje**. Maxwellovy rovnice jsou vlastně zobecněním a matematickou formulací dříve nalezených zákonů: zákona celkového proudu (I. M. r.), zákona elektromagnetické indukce (II. M. r.), Gaussovy věty pro elektrické pole (III. M. r.) a Gaussovy věty pro magnetické pole (IV. M. r.). Zatímco rovnice I. a II. vyjadřují vztah mezi elektrickým a magnetickým polem, rovnice III. a IV. vyjadřují, co je zdrojem těchto polí.

V elektrotechnice pracujeme převážně s elektrickými obvody. Jejich rozbor a návrh s použitím obecných zákonů elektromagnetického pole by byl sice přesný, ale nesmírně obtížný a výpočetně náročný. Proto se tyto obecné zákony elektromagnetického pole zjednodušují pro podmínky elektrického obvodu, přičemž jde vždy o zjednodušení s větší či menší přesností.

Rovnice elektromagnetického pole totiž vedou na řešení, jehož součástí jsou **vlny intenzit** $\vec{E}$ a $\vec{H}$. Tyto **vlny se šíří** prostorem jako rozruch **konečnou rychlostí** v. Ve vakuu je tato rychlost rovna rychlosti světla $c=300\ 000\ km/s$, v každém jiném prostředí je menší. I když by se mohlo zdát, že je to obrovská rychlost, vlna urazí pouze

$$300\ km/ms = 300\ m/\mu s = 300\ mm/ns = 0{,}3\ mm/ps.$$

Při sledování časových průběhů procesů proto musíme obecně brát tuto skutečnost v úvahu a rozlišovat **soustavy se soustředěnými parametry** a **soustavy s rozprostřenými parametry**.

Soustava se soustředěnými parametry se vyznačuje relativně malými fyzickými rozměry ve srovnání s drahou, kterou elektromagnetické vlnění urazí za dobu, po kterou trvají typické děje v soustavě. Příklady: zesilovač akustického signálu, analogový integrovaný obvod, rozvod elektrické energie v domě nebo v obci. Soustavu lze rozdělit na jednotlivé prvky, jejichž vzájemné propojení je charakterizováno **elektrickým schématem**. Přitom nezáleží na tom, jak jsou jednotlivé prvky rozloženy v prostoru. U každého takového prvku je přitom uvažována přeměna elektrické energie pouze na jeden typ energie. Z matematického hlediska je soustava popsána **obyčejnými diferenciálními rovnicemi** s časem jako jedinou nezávisle proměnnou.

Soustava s rozprostřenými parametry má relativně veliké rozměry. Příklad: vedení k anténě, dálkové vedení elektrické energie, podmořský telefonní kabel, kabeláž počítače s vysokým hodinovým kmitočtem. Při popisu soustavy je podstatné nejen vzájemné propojení jednotlivých částí, ale i jejich **prostorové uspořádání**. V těchto soustavách dochází obecně k přeměně elektrické energie současně v teplo, energii elektrického i magnetického pole. K popisu soustavy jsou nutné **parciální diferenciální rovnice**, v nichž kromě času vystupují jako nezávisle proměnné také souřadnice v prostoru.

2 Základy elektrických obvodů

2.1 Základní pojmy a zákony

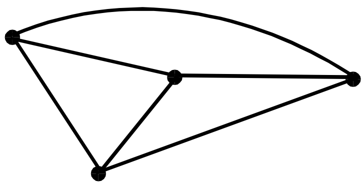
Pod pojmem **elektrický obvod** rozumíme takové uspořádání obvodových prvků, jehož účelem je určitá funkce, např. přenos či přeměna elektrické energie nebo zpracování elektrického signálu. V souvislosti s tím rozlišujeme **analýzu** a **syntézu** elektrického obvodu.

Analýzou rozumíme postup, při kterém zkoumáme obvodové veličiny (napětí, proudy) v obvodu, jehož struktura i hodnoty parametrů jednotlivých prvků jsou dány. **Cílem** analýzy je pak výpočet a tabelární nebo častěji grafické vyjádření důležitých průběhů a následné posouzení funkce obvodu. Analýza je často důležitou podmínkou pro dokonalé pochopení podstaty dějů v obvodu. Je to v principu **postup jednoznačný**, i když různé metody analýzy mohou vést k cíli rozdílnými a různě složitými cestami.

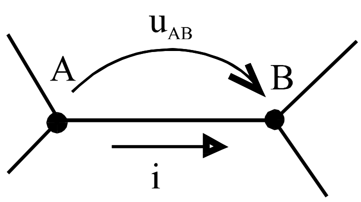
Syntézou rozumíme návrh konfigurace obvodu a výpočet parametrů jeho prvků tak, aby co nejlépe plnil předem stanovenou funkci. Obecně může syntéza vést k celé řadě různých způsobů realizace výsledného obvodu. Úkolem konečné fáze syntézy bývá **optimalizace** výsledného řešení např. z hlediska přesnosti splnění výchozích požadavků, z hlediska výrobních nákladů, náročnosti na údržbu apod.

Při analýze vycházíme z elektrického schématu obvodu. Jednotlivé obvodové prvky jsou vzájemně propojeny prostřednictvím svých **svorek**. Místo, kde jsou spojeny svorky minimálně dvou prvků, se nazývá **uzel**. Část obvodu mezi dvěma uzly je **větev**. Počet uzlů a větví v obvodu určuje složitost obvodu a v důsledku toho i **počet nezávislých rovnic**, které potřebujeme k úplnému popisu procesů v obvodu.

Dobrou představu o konfiguraci obvodu dává tzv. **topologické schéma**. Jeho příklad je na **Obr. 2.1**. V topologickém schématu jsou znázorněny jednotlivé uzly jako body, v nichž se stýkají větve znázorněné čarami. Konkrétní složení větví není z tohoto schématu patrno.



Obr. 2.1: Topologické schéma obvodu



Obr. 2.2: Způsob vyznačení napětí a proudu

V elektrickém schématu vyznačujeme **elektrická napětí** mezi uzly pomocí čítacích šipek, jak uvádí **Obr.** 2.2. Šipka ukazuje nejen to, mezi kterou dvojicí uzlů napětí měříme, ale i **orientaci**, tj. odkud a kam je napětí určováno. Pro označení **proudů** větvemi používáme **proudové šipky**, které se tvarově od šipek pro napětí liší, jak je rovněž patrno z **Obr.** 2.2.

Orientační šipky zakreslujeme do schématu na samém počátku analýzy, kdy často ještě nemáme představu o skutečných polaritách napětí a proudů v obvodu. Zvolené orientace se však od tohoto okamžiku musíme při formulaci rovnic důsledně držet. Teprve potom, když řešením rovnic získáme numerické hodnoty obvodových veličin včetně znamének, můžeme definitivně určit, jak to s polaritami skutečně je. Kladná hodnota napětí u_{AB} označeného na **Obr.** 2.2 šipkou mířící od uzlu A k uzlu B znamená, že uzel A je kladný vzhledem k uzlu B. Je-li však výsledná hodnota u_{AB} záporná, je potenciál uzlu A nižší než potenciál uzlu

B. Podobně kladný výsledek pro proud *i* indikuje, že proud skutečně teče směrem, kterým ukazuje šipka, záporný výsledek znamená, že proud ve skutečnosti teče směrem opačným.

Všechny metody analýzy vycházejí ze dvou základních vztahů, vyjadřujících tzv. **Kirchhoffovy zákony (**formulované v r. 1845 německým badatelem G.R. Kirchhoffem):

První Kirchhoffův zákon (zkratka 1. KZ , tzv. **proudový**) říká, že **algebraický součet proudů v uzlu je roven nule**. Vychází ze skutečnosti, že v uzlu se nemohou elektrické náboje ani ztrácet ani generovat, je tedy důsledkem platnosti zákona o zachování náboje. Při formulaci rovnic dodržujeme pravidlo, že proudy, které z uzlu vytékají, bereme s kladným znaménkem, proudy vtékající se záporným znaménkem.

Obecně můžeme psát

$$\sum_k \pm I_k = 0 \quad . \qquad (2.1)$$

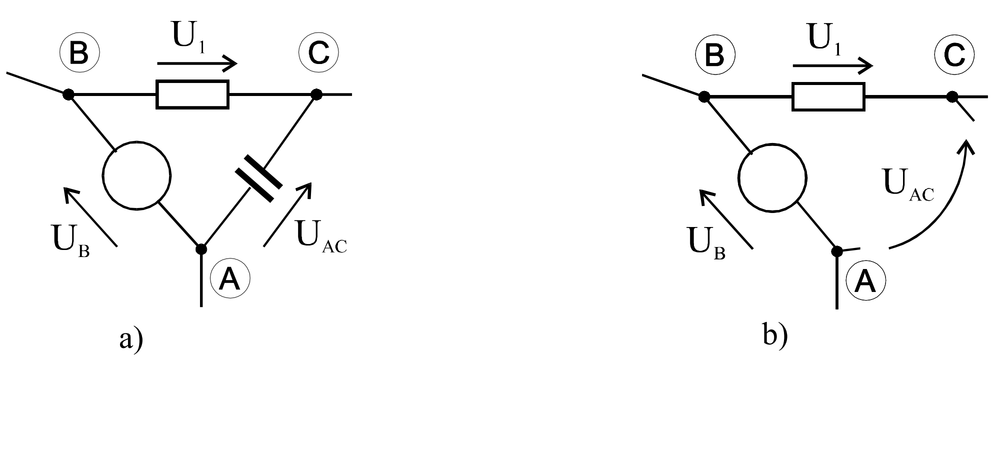
Tak např. pro situaci znázorněnou na **Obr. 2.3a** platí: $I_a + I_b - I_c = 0$, na **Obr. 2.3b** pak: $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$. Zde samozřejmě předpokládáme, že výsledné proudy I_1, I_2, I_3 budou mít různá znaménka (znaménko jednoho z nich se bude lišit od znaménka zbývajících dvou).

Obr. 2.3: K vysvětlení I. Kirchhoffova zákona

Druhý Kirchhoffův zákon (zkratka 2. KZ, tzv. **napěťový**) říká, že **algebraický součet napětí podél uzavřené smyčky je roven nule**. Ve své podstatě je tento zákon zákonem o zachování energie v elektrickém obvodu, což je zřejmé z definice napětí. Jako **uzavřenou smyčku** v této souvislosti chápeme cestu začínající v některém uzlu, pokračující dalšími uzly a končící v uzlu, ve kterém začala. Žádným uzlem přitom neprochází dvakrát. Prakticky postupujeme tak, že si nejdříve ve smyčce vyznačíme kladný smysl oběhu. Pak napětí, jejichž čítací šipky souhlasí se zvoleným kladným smyslem, bereme jako kladná, když nesouhlasí, tak jako záporná. Obecně můžeme psát

$$\sum_k \pm U_k = 0 \quad . \qquad (2.2)$$

Příklad ukazuje **Obr. 2.4a.** Platí: $U_1 - U_{AC} + U_B = 0$, kdy kladný smysl oběhu byl zvolen ve směru hodinových ručiček. Přitom není nutné, aby mezi jednotlivými uzly existovala skutečně větev, jak je znázorněno na **Obr. 2.4b**.



Obr. 2.4: K vysvětlení II. Kirchhoffova zákona

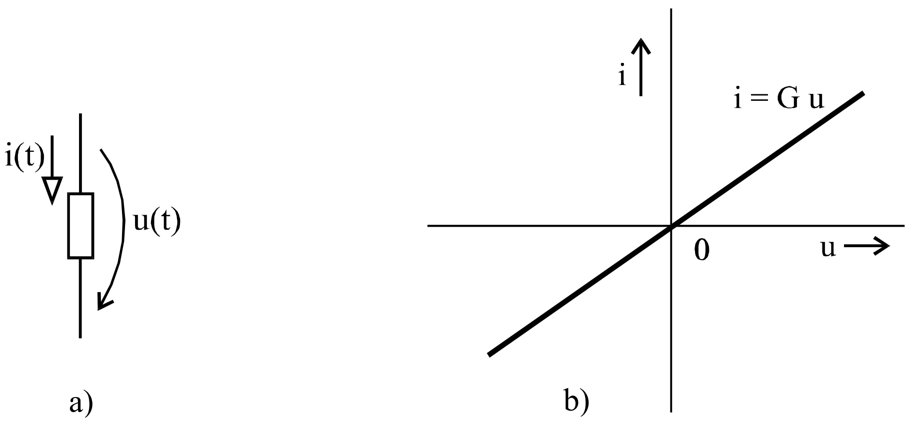
2.2 Pasivní obvodové prvky

Za pasivní obvodové prvky pokládáme ty prvky, které nemohou elektrickou energii do obvodu dodávat. Jsou to prvky **disipativní**, které energii **spotřebovávají** (mění na jinou formu energie) a prvky **akumulační**, které ji akumulují (dočasně **uchovávají**) ve formě energie elektrického nebo magnetického pole.

Skutečné, **reálné prvky**, se kterými se v praxi setkáváme, obvykle v sobě zahrnují všechny uvedené způsoby přeměny energie. Většinou je jeden z nich žádoucí a je **dominantní** a zbývající jsou obvykle nežádoucí a pokládáme je za **parazitní**. Pro zjednodušení analýzy a syntézy definujeme potom **ideální obvodové prvky**, které se vyznačují pouze jediným způsobem přeměny energie. Pomocí nich pak vytváříme **náhradní schémata**, **modely** reálných prvků, od jednoduchých až po značně složitá náhradní schémata podle toho, jakou přesnost náhrady vyžadujeme resp. podle režimu, ve kterém prvky pracují. Je proto třeba rozlišovat mezi pojmy **odpor** – **rezistor, kondenzátor – kapacitor** a **cívka – induktor** jako mezi reálnými a ideálními prvky.

2.2.1 Rezistor

Rezistor je disipativní obvodový prvek, který elektrickou energii nevratným způsobem mění na jinou formu energie. Jeho schématická značka je na **Obr. 2.5a** spolu s čítacími šipkami napětí a proudu.



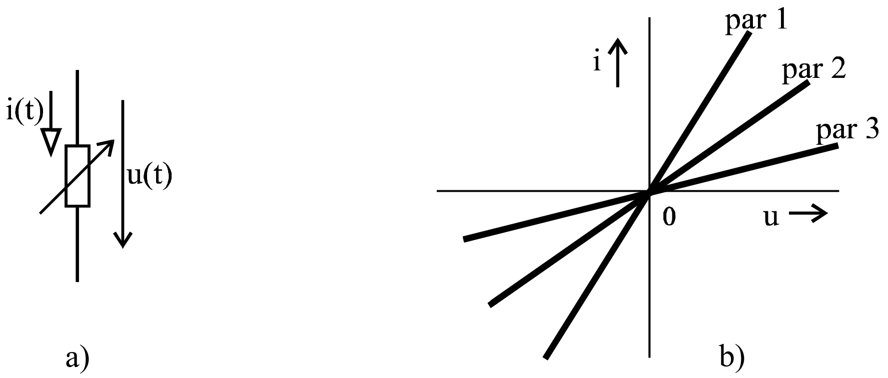
Obr. 2.5: Rezistor a jeho ampérvoltová charakteristika

Základní charakteristikou rezistoru je závislost proudu na napětí, tzv. **ampérvoltová charakteristika**. V nejjednodušším případě tzv. **lineárního rezistoru** je tato závislost zobrazena v rovině *u-i* přímkou procházející počátkem, jak je znázorněno na **Obr. 2.5b**. Potom je proud přímo úměrný napětí a platí **Ohmův zákon**

$$i = G.u = \frac{1}{R}.u \ , \qquad (2.3)$$

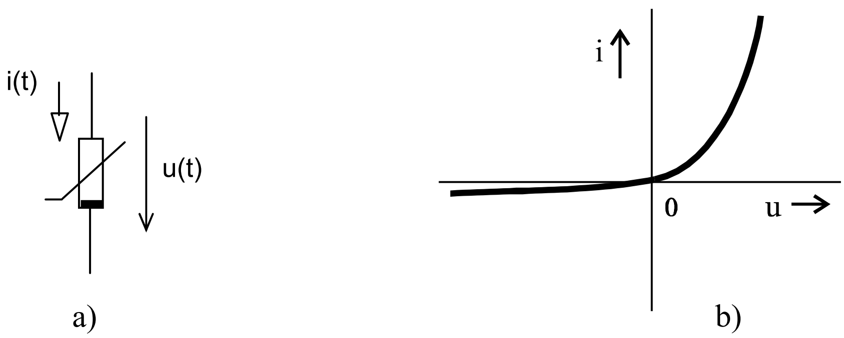
kde R je odpor rezistoru, G je jeho vodivost. Rezistor je pak popsán jedinou číselnou konstantou, parametrem R nebo G.

Existují však také rezistory s lineární charakteristikou, jejíž sklon není konstantní, ale závisí na nějaké vnější veličině, např. na teplotě, intenzitě osvětlení, mechanickém nastavení ovládacího prvku, napětí v nějakém jiném místě obvodu apod. Používáme pak schématickou značku podle **Obr. 2.6a** a hovoříme o rezistorech **parametrických**, s parametry obecně závislými na čase.



Obr. 2.6: Parametrický rezistor a jeho ampérvoltová charakteristika

Jiná situace je zobrazena na **Obr. 2.7**. Ampérvoltová charakteristika tohoto rezistoru je **nelineární**.



Obr. 2.7: Nelineární rezistor a jeho ampérvoltová charakteristika

Pro popis funkce rezistoru pak jedna hodnota nestačí, obvykle je třeba mít k dispozici celou charakteristiku. Nelineární rezistory tvoří velmi důležitou skupinu obvodových prvků. Řešení obvodů s těmito rezistory je vždy podstatně složitější než řešení obvodů lineárních. U nelineárních rezistorů lze také používat pojmů odpor a vodivost, rozlišuje se však mezi tzv. **statickým** a **dynamickým (diferenciálním)** odporem a vodivostí a jedná se o veličiny závislé na poloze pracovního bodu na dané charakteristice, jak je dále naznačeno na **Obr. 2.8**.

Statický odpor je definován jako

$$R_s(i) = \frac{u}{i} \quad , \tag{2.4}$$

statická vodivost je pak rovna

$$G_s(u) = \frac{i}{u} = \frac{1}{R_s(u)} \quad . \tag{2.5}$$

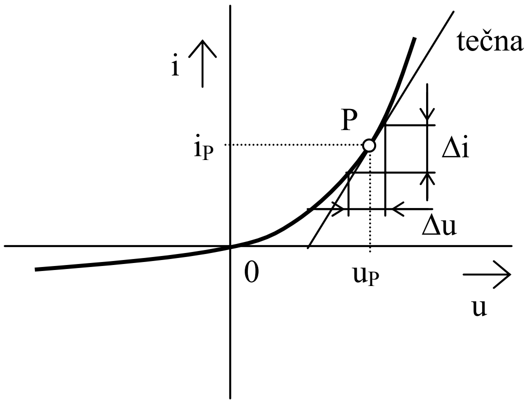
V mnoha praktických aplikacích je dán pracovní režim nelineárního rezistoru malými změnami napětí a proudu v blízkém okolí tzv. **klidového pracovního bodu**. Pro takový druh provozu je účelné definovat dynamický odpor pomocí přírůstků napětí a proudů na dané charakteristice jako

$$R_d(i) = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di} \quad , \tag{2.6}$$

dynamická vodivost je pak rovna

$$G_d(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{di}{du} = \frac{1}{R_d(u)} \quad . \qquad (2.7)$$

Geometricky jsou dynamické parametry určeny směrnicí tečny k charakteristice v daném pracovním bodě *P*, viz **Obr. 2.8**.



Obr. 2.8: K vysvětlení dynamických parametrů nelineárního rezistoru

Také nelineární rezistory mohou být parametrické, kdy A-V charakteristikou je obecně soustava křivek. Příkladem je např. fotodioda, polovodičová dioda, jejíž charakteristika závisí na intenzitě dopadajícího světla (viditelného nebo neviditelného).

Bez ohledu na to, zda jde o lineární nebo nelineární rezistor, **okamžitý výkon** ztracený v rezistoru je podle (1.14) roven součinu napětí a proudu v daném okamžiku

$$p(t) = u(t).i(t) \quad . \qquad (2.8)$$

U **lineárního rezistoru** je možno pomocí Ohmova zákona upravit výraz pro výkon na

$$p(t) = R.i^2(t) = G.u^2(t) = \frac{u^2(t)}{R} \quad . \qquad (2.9)$$

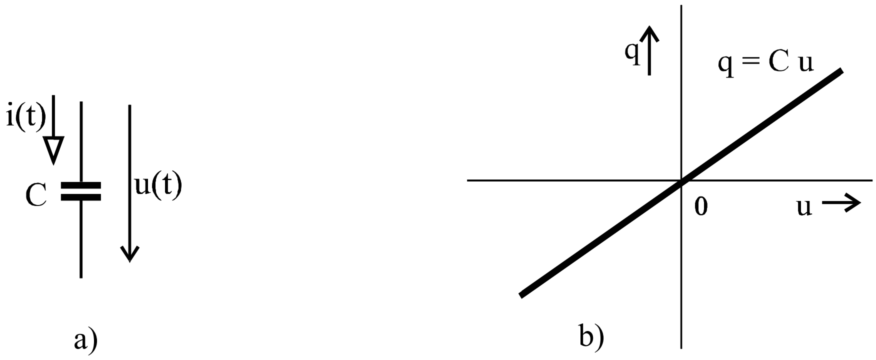
Energii přeměněnou v teplo v časovém intervalu $\langle 0; t \rangle$ pak vypočítáme jako

$$W_t = \int_0^t p(\tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)i(\tau)d\tau \quad . \qquad (2.10)$$

Skutečný obvodový prvek, kterým je rezistor realizován, se nazývá **odporník** (tento název se však v technické praxi nevžil a používá se názvu **odpor**, tedy stejného jako pro dominantní vlastnost odporníku). Využívá vlastností proudového pole a různých velikostí odporu se dosahuje volbou materiálu a geometrických rozměrů. Elektrická energie, která se nevratně přeměňuje v teplo, odporník zahřívá, přičemž část dodané energie se odvádí jeho povrchem do okolí. Teplota odporníku nemůže přesáhnout určitou hodnotu danou vlastnostmi použitých materiálů. Proto se u odporníků kromě **velikosti odporu** udává i **největší dovolený výkon**. Obecně se kromě proudového pole v odporníku a jeho okolí vytváří i pole elektrické a magnetické. Jejich vlivy, pokud je nelze pro předpokládaný druh provozu zanedbat, se dají respektovat modelem odporníku, který obsahuje další ideální obvodové prvky – kapacitor a induktor.

2.2.2 Kapacitor

Kapacitor akumuluje energii ve formě energie elektrického pole. Jeho schématická značka je na **Obr. 2.9a**. Kapacitor je charakterizován závislostí akumulovaného náboje q na napětí u. Říká se jí **coulombvoltová charakteristika** a je uvedena na **Obr. 2.9b**.



Obr. 2.9: Kapacitor a jeho coulombvoltová charakteristika

Je-li zobrazena přímkou procházející počátkem, jde o **lineární kapacitor**, definovaný kapacitou

$$C = \frac{q}{u} \tag{2.11}$$

jako jediným parametrem.

Ačkoli se **kondenzátor** – praktická realizace kapacitoru – skládá z elektrod, oddělených vzájemně dielektrikem (izolantem), může obvodem s kondenzátorem protékat časově proměnný proud. Protože **proud** definujeme jako rychlost změny elektrického náboje, v případě časově neproměnné kapacity (C = *konst*) potom platí

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du(t)}{dt} \quad . \tag{2.12}$$

Pro **napětí** na kapacitoru dostaneme integrací obou stran této rovnice podle času

$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \quad . \tag{2.13}$$

V první části tohoto výrazu vystupuje neurčitý integrál, jehož hodnota představuje náboj kondenzátoru *q(t)*. Ve druhé části je pak napětí v okamžiku t vyjádřeno jako součet tzv. **počátečního napětí** kapacitoru *u(0)* a přírůstku napětí za dobu od nuly do t.

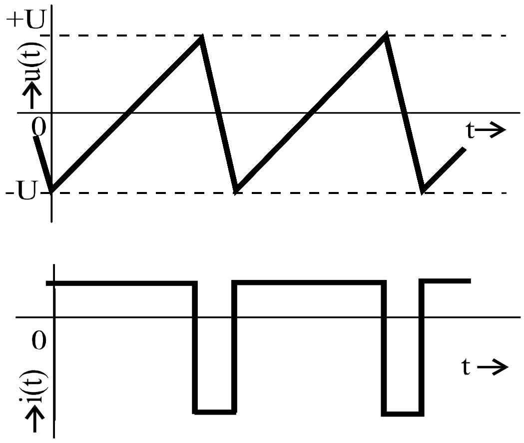
Nyní můžeme odvodit vztah pro **energii** akumulovanou v **elektrickém** poli kapacitoru jako integrál okamžitého výkonu, tedy

$$W_e(t) = \int_0^t u(\tau)i(\tau)d\tau = C\int_0^{u(t)} u(\tau)du(\tau) = \frac{1}{2}Cu^2(t) \quad , \tag{2.14}$$

kdy bylo při úpravě užito vztahu (2.12).

Energie je z makroskopického hlediska spojitou funkcí a její velikost dosažená v určitém časovém okamžiku nezávisí na způsobu, jakým jí bylo dosaženo. Je dána konečným stavem a označuje se jako **stavová veličina**. Stejné vlastnosti pak musí mít i veličiny, pomocí nichž se dá tato energie vyjádřit. Proto také **elektrický náboj** a **napětí** na kapacitoru jsou stavovými veličinami a jsou tedy funkcemi spojitými, zatímco proud kapacitorem spojitý být nemusí.

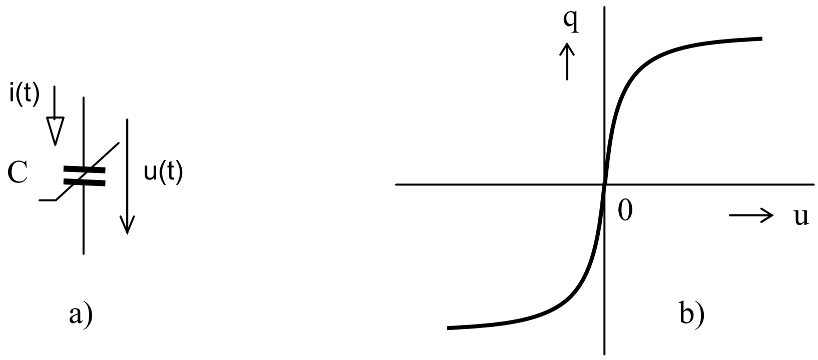
Pro ilustraci funkce lineárního kapacitoru předpokládejme, že napětí na něm je určeno vnějším zdrojem a má časový průběh znázorněný na **Obr. 2.10**.



Obr. 2.10: K ilustraci funkce lineárního kapacitoru

Je to tzv. **pilovitý průběh**, běžně užívaný např. v měřicích přístrojích nebo v převodnících analogových signálů na digitální. Ve spodní části obrázku je znázorněn průběh proudu. Protože v první části periody napětí lineárně narůstá s konstantní kladnou směrnicí, je jeho časová derivace, a tedy i proud obvodem, kladná konstanta. Ve druhé části periody pak napětí lineárně klesá (rychleji než předtím stoupalo) a proud je proto konstantní a záporný. Průběh proudu je obdélníkový. Kapacitor působí jako **derivační prvek**. Obvod může ovšem pracovat i obráceně jako **prvek integrační**, napájíme-li jej ze zdroje proudu.

Můžeme také uvažovat **nelineární kapacitor**, jehož schématická značka je na **Obr. 2.11a** a příklad coulombvoltové charakteristiky na **Obr. 2.11b**.



Obr. 2.11: Nelineární kapacitor a jeho coulombvoltová charakteristika

U nelineárního kapacitoru uvažujeme **statickou** a **dynamickou kapacitu**, které jsou závislé na poloze pracovního bodu, podobně jako tomu bylo u nelineárního rezistoru s odporem a vodivostí.

Statická kapacita je definována jako

$$C_s(u) = \frac{q(u)}{u} \quad , \qquad (2.15)$$

dynamická pak

$$C_d(u) = \frac{dq(u)}{du} \quad . \qquad (2.16)$$

Budeme-li nyní uvažovat dynamickou kapacitu, můžeme pro proud kapacitorem psát

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq(u)}{du}\frac{du(t)}{dt} = C_d(u)\frac{du(t)}{dt} \quad , \qquad (2.17)$$

kde jsme dosadili ze vztahu (2.16). Můžeme ale také psát, při uvážení (2.15), rovnici

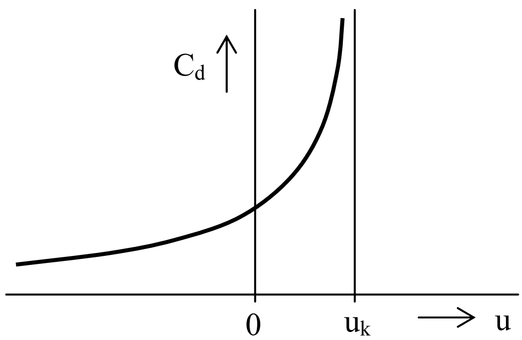
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[C_s(u)u] = \left[C_s(u) + u\frac{dC_s(u)}{du}\right]\frac{du(t)}{dt} \quad , \qquad (2.18)$$

odkud plyne vzájemný vztah mezi dynamickou a statickou kapacitou

$$C_d(u) = C_s(u) + u\frac{dC_s(u)}{du} \quad . \qquad (2.19)$$

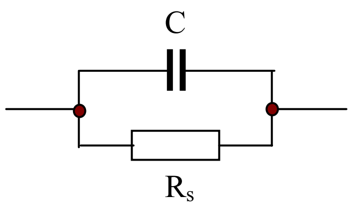
Z poslední rovnice také ihned vyplývá rovnost mezi statickou a dynamickou kapacitou, jedná-li se o kapacitor lineární. Pak totiž C_s není funkcí napětí a derivace je nulová.

Typickým představitelem nelineárního kapacitoru je např. **varicap**, což je v principu PN přechod, jehož kapacita je řízena stejnosměrným napětím, viz **Obr. 2.12**. Zvláštní skupinu pak tvoří modely kondenzátorů, které mají dielektrika z tzv. **feroelektrických** látek. Ty se kromě nelinearity vyznačují i hysterezí, jejímž důsledkem je nejednoznačnost charakteristik.



Obr. 2.12: Závislost dynamické kapacity varicapu na napětí

Skutečný obvodový prvek, kterým je kapacitor realizován, se nazývá **kondenzátor**. Kromě své dominantní vlastnosti – **kapacity** – vykazuje i další nežádoucí vlastnosti. Nedokonalost dielektrika, tj. jeho jistá elektrická vodivost, dává vzniknout proudovému poli mezi elektrodami kondenzátoru. Tato skutečnost se označuje jako **svod** a v modelu kondenzátoru se dá vyjádřit přidáním rezistoru dle **Obr. 2.13**.

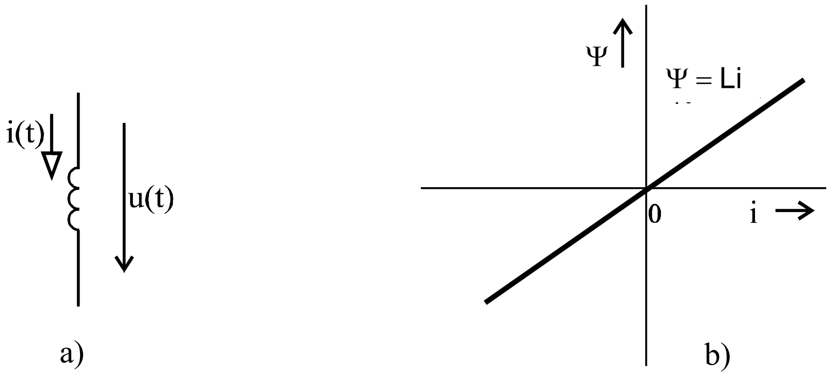


Obr. 2.13: Model kondenzátoru respektující svod dielektrika

Na kondenzátor můžeme připojit napětí pouze do jisté velikosti, neboť dielektrikum má omezenou elektrickou pevnost. Toto **největší přípustné napětí** je dalším parametrem, který je u kondenzátorů udáván. Při rychlých časových změnách obvodových veličin se může projevit i magnetické pole přívodů a elektrod, což lze pak respektovat doplněním modelu kondenzátoru induktory.

2.2.3 Induktor

Induktor akumuluje energii v magnetickém poli. Jeho schématická značka je na **Obr. 2.14a**. **Induktor** je charakterizován závislostí spřaženého magnetického toku Ψ na proudu *i*.



Obr. 2.14: Induktor a jeho weberampérová charakteristika

Říká se jí **weberampérová charakteristika** a je uvedena na **Obr. 2.14b**. Je-li zobrazena přímkou procházející počátkem, jde o **lineární induktor** popsaný **indukčností**

$$L = \frac{\Psi}{i} \qquad (2.20)$$

jako jediným parametrem. Praktickou realizací induktorů jsou **cívky**.

Napětí na svorkách induktoru je rovno **rychlosti změny spřaženého magnetického toku,** a protože tok je úměrný proudu, potom v případě časově neproměnné indukčnosti ($L = konst$) platí

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = L\frac{di(t)}{dt} \quad . \qquad (2.21)$$

Proud induktorem můžeme naopak vyjádřit jako

$$i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u(t)dt \quad , \qquad (2.22)$$

kde *i(0)* je **počáteční hodnota proudu**.

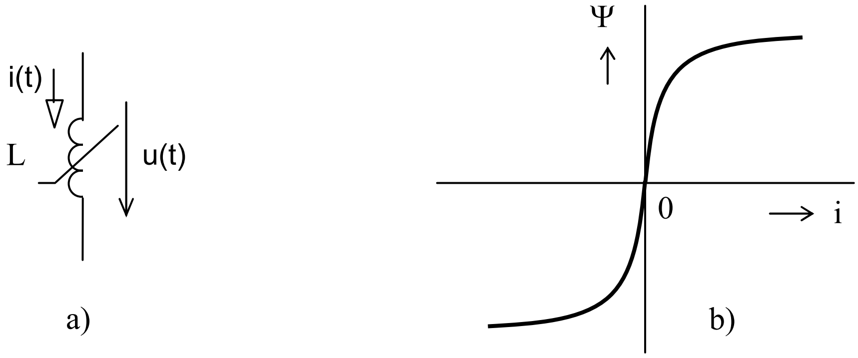
Při odvození vztahu pro **energii** akumulovanou v **magnetickém** poli induktoru opět vycházíme z integrálu okamžitého výkonu, při využití vztahu (2.21). Dostáváme

$$W_m(t) = \int_0^t u(\tau)i(\tau)d\tau = L\int_0^{i(t)} i(\tau)di(\tau) = \frac{1}{2}Li^2(t) \quad . \qquad (2.23)$$

Ze vztahu vyplývá, že **stavovými** (tedy i spojitými) veličinami jsou **spřažený magnetický tok** a **proud** induktorem, zatímco napětí na induktoru může být obecně funkcí nespojitou.

Z podobnosti (tzv. **duality,** viz kap. 3.6.5) rovnic pro kapacitor a induktor vyplývá, že i cívka se podobně jako kondenzátor dá použít pro integraci nebo derivování signálu. Praktické důvody však vedou k tomu, že se pro tyto účely daleko častěji používá kondenzátorů.

Lze také uvažovat **nelineární induktor**, jehož schématická značka je na **Obr. 2.15a** a příklad weberampérové charakteristiky na **Obr. 2.15b**.



Obr. 2.15: Nelineární induktor a příklad weberampérové charakteristiky

U nelineárního induktoru se zavádí **statická** a **dynamická indukčnost**, které jsou závislé na poloze pracovního bodu, podobně jako tomu bylo pro nelineární rezistor a kapacitor.

Statická indukčnost je definována jako

$$L_s(i) = \frac{\Psi(i)}{i} \quad , \tag{2.24}$$

dynamická pak

$$L_d(i) = \frac{d\Psi(i)}{di} \quad . \tag{2.25}$$

Budeme-li nyní uvažovat dynamickou indukčnost, můžeme pro napětí na induktoru psát

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d\Psi(i)}{di}\frac{di(t)}{dt} = L_d(i)\frac{di(t)}{dt} \quad , \tag{2.26}$$

kde jsme dosadili ze vztahu(2.25). Můžeme ale také psát, při uvážení (2.24), rovnici

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[L_s(i)i] = \left[L_s(i) + i\frac{dL_s(i)}{di}\right]\frac{di(t)}{dt} \quad , \tag{2.27}$$

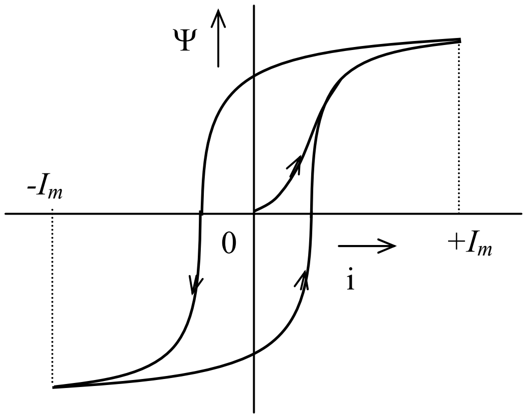
odkud plyne vzájemný vztah mezi dynamickou a statickou indukčností

$$L_d(i) = L_s(i) + i\frac{dL_s(i)}{di} \quad . \tag{2.28}$$

Z poslední rovnice také ihned vyplývá rovnost mezi statickou a dynamickou indukčností, jedná-li se o induktor lineární. Pak totiž L_s není funkcí proudu a derivace je nulová.

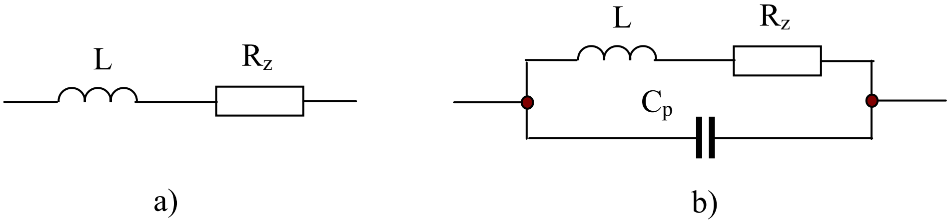
K nejvýznamnější skupině nelineárních induktorů patří modely cívek, které mají jádra z **feromagnetických** látek. Vyznačují se tím, že pohyb pracovního bodu v rovině (Ψ, i) závisí nejen na poloze výchozího bodu, ale také na smyslu pohybu. Jev se nazývá jako **hystereze** a způsobuje nejednoznačnost charakteristik, jejichž tvar je závislý na způsobu buzení. Při periodickém buzení opisuje pracovní bod **hysterezní smyčku**, viz **Obr. 2.16**.

Proběhne-li pracovní bod úplným oběhem po hysterezní smyčce, převede se nevratně na teplo energie úměrná ploše obepnuté smyčkou. To znamená, že cívky s feromagnetickými jádry nejsou bezeztrátovými prvky, ani když předpokládáme nulový odpor jejich vinutí.



Obr. 2.16: Hysterezní smyčka cívky s feromagnetickým jádrem

Skutečný obvodový prvek, kterým je induktor realizován, se nazývá **cívka**. Cívka má kromě své vlastnosti dominantní – **indukčnosti** – zpravidla také výrazné vlastnosti nežádoucí. Nelze totiž většinou zanedbat odpor vodiče, ze kterého je cívka navinuta. Tuto skutečnost lze respektovat modelem cívky, obsahující induktor v sérii s rezistorem, viz **Obr. 2.17a**. Při rychlých časových změnách proudu se navíc uplatňuje i elektrické pole mezi závity, což lze modelovat přidáním dalšího prvku, a to paralelně zapojeného kapacitoru, viz **Obr. 2.17b**.

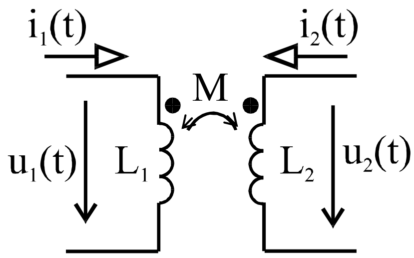


Obr. 2.17: Dva nejčastěji užívané modely cívky

Pro dosažení větších indukčností se často používají cívky s **feromagnetickými** jádry. V tomto případě je nutno počítat i se všemi nepříznivými důsledky hystereze. Např. přídavné **hysterezní ztráty** lze v modelu cívky zahrnout také do ztrátového rezistoru R_z . Dalším omezujícím parametrem cívky je největší dovolený tepelný výkon, který se může odvést povrchem vinutí do okolí, aniž se překročí dovolená teplota.

2.2.4 Vázané induktory

Je-li v magnetickém poli cívky protékané časově proměnným proudem umístěna jiná cívka, indukuje se napětí i v ní. Tatáž situace nastane, pokud si obě cívky vymění své role. Tuto skutečnost respektujeme zavedením prvků nazývaných **vázané induktory**. Schématická značka je uvedena na **Obr. 2.18**.



Obr. 2.18: Vázané induktory

Hovoří se také o **cívkách se vzájemnou magnetickou vazbou**. Setkáváme se s nimi např. u elektrických strojů (transformátorů, motorů, generátorů), ale i v zařízeních sdělovací techniky.

Magnetický tok spřažený se závity cívky L_1 se skládá z vlastního toku Ψ_{11} této cívky vytvořeného jejím proudem i_1 a toku Ψ_{12} vyvolaného proudem druhé cívky i_2, tj.

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2 \quad , \tag{2.29}$$

a podobně u cívky druhé

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = L_2 i_2 \pm M_{21} i_1 \quad . \tag{2.30}$$

V těchto rovnicích je L_1 a L_2 **vlastní indukčnost** každé z cívek, bez vlivu druhé cívky, a $M_{12} = M_{21} = M$ je tzv. **vzájemná indukčnost**. Kladná hodnota $+M$ se volí tehdy, jestliže jsou cívky navinuty souhlasně, tj. jestliže kladný proud vtékající u obou cívek do svorky označené tečkou vytvoří magnetické toky, které se sčítají, podporují. Záporná hodnota $-M$ vystupuje v případě, že tok vytvořený proudem jedné cívky je proudem druhé cívky zeslabován.

Použitím vztahu (2.21) pak můžeme pro napětí na první cívce psát

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} \quad , \tag{2.31}$$

a podobně pro napětí na druhé cívce

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt} \quad . \tag{2.32}$$

V praxi se setkáváme i s případy, kdy je vzájemně vázáno více cívek než dvě, princip matematického popisu zůstává i pak prakticky stejný.

Jiný parametr, který může být použit pro vyjádření vazby mezi induktory, je tzv. **činitel vazby** κ, který je definován vztahem

$$\kappa = M \big/ \sqrt{L_1 L_2} \quad . \tag{2.33}$$

Jeho velikost se může pohybovat v mezích **od nuly** (žádná vazba) až **do jedné** (dokonalá vazba, prakticky však nedosažitelná).

Vzájemná vazba induktorů má také vliv na **energii** akumulovanou v magnetickém poli. Pro její odvození lze využít skutečnosti, že se jedná o stavovou veličinu, jejíž velikost je dána dosaženými hodnotami proudů, bez ohledu na jejich předchozí časový průběh. Nejprve při proudu $i_2 = 0$ zvětšíme proud i_1 z nuly na konstantní hodnotu I_1. Akumulovaná energie je dána vztahem (2.23), tj. $W_{m1} = L_1 I_1^2 \big/ 2$. Nyní zvětšíme také proud i_2 z nuly na konstantní hodnotu I_2. Během tohoto úkonu je na L_2 napětí podle (2.32), z důvodu $I_1 = konst$ s nulovým druhým členem, proto $W_{m2} = \int_0^t u_2 i_2 d\tau = \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$. Na induktoru L_1 je během tohoto úkonu napětí podle (2.31), s prvním členem nulovým, proto $W_{m12} = \int_0^t u_1 i_1 d\tau = \pm I_1 \int_0^{I_2} M di_2 = \pm M I_1 I_2$.

Celková energie je dána součtem dílčích energií, tj. $W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m12}$. Vztah platí i pro okamžité hodnoty energie při časově proměnných proudech. Hledaná energie je proto rovna

$$W_m(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) \pm M i_1(t) i_2(t) \quad . \qquad (2.34)$$

2.3 Aktivní obvodové prvky

Aktivní prvky působí v obvodu jako **zdroje elektrické energie**. Ve skutečnosti ovšem tuto energii nevyrábějí, ale získávají ji z energie jiného druhu, např. energie chemické, tepelné, světelné, mechanické nebo jiné.

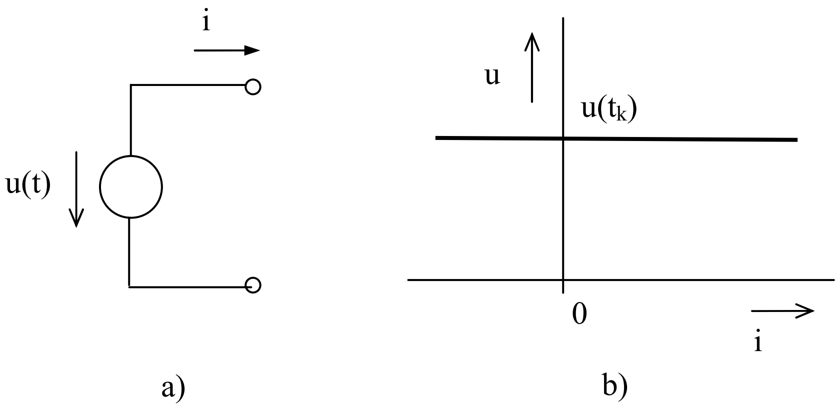
Aktivní prvky dělíme na: **nezávislé** (autonomní) **zdroje** a
závislé (řízené) **zdroje**.

2.3.1 Nezávislé zdroje elektrické energie

Nezávislé zdroje dodávají do obvodu elektrickou energii nezávisle na obvodových veličinách (napětích a proudech). V zásadě jde o **nezávislé zdroje napětí** a **nezávislé zdroje proudu**. U obou typů rozlišujeme dále **ideální** a **reálné** zdroje. Obecně lze rozlišovat také mezi zdroji **lineárními** a **nelineárními**.

a) Nezávislý zdroj napětí

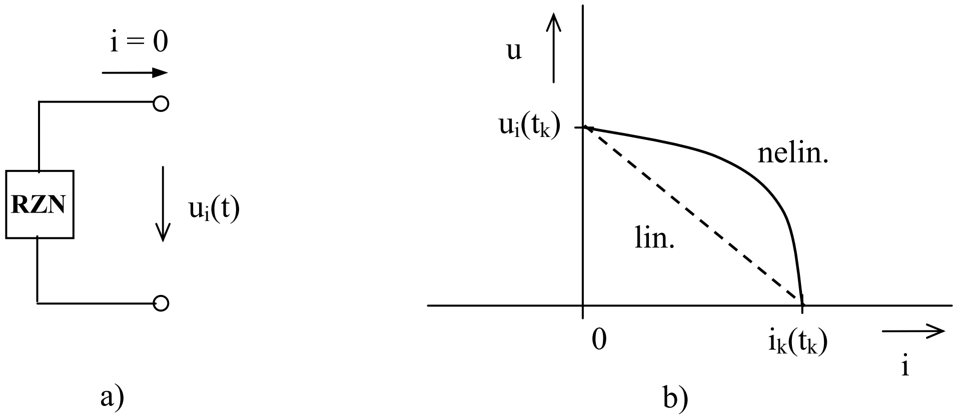
Ideální nezávislý zdroj napětí je základní aktivní prvek, který udržuje na svých svorkách napětí určitého časového průběhu nezávisle na velikosti odebíraného proudu. Jeho schematická značka je na **Obr. 2.19a**.



Obr. 2.19: Ideální zdroj napětí a jeho zatěžovací charakteristika

Jediným parametrem ideálního zdroje napětí je daný časový průběh jeho napětí *u(t)*. Charakteristikou je vztah mezi tímto napětím a odebíraným proudem, tzv. **zatěžovací charakteristika zdroje**, zobrazená na **Obr. 2.19b**. Pro každý časový okamžik t_k je charakteristika přímka rovnoběžná s osou proudu. Tím, že přechází z 1. do 2. kvadrantu, je zdůrazněno, že zdroj je schopen nejen dodávat proud do zátěže, ale i přijímat proud z případného jiného zdroje v obvodu. **Ideální zdroj** napětí je schopen dodávat jakkoli veliký výstupní proud a má tedy **nekonečnou zásobu energie**.

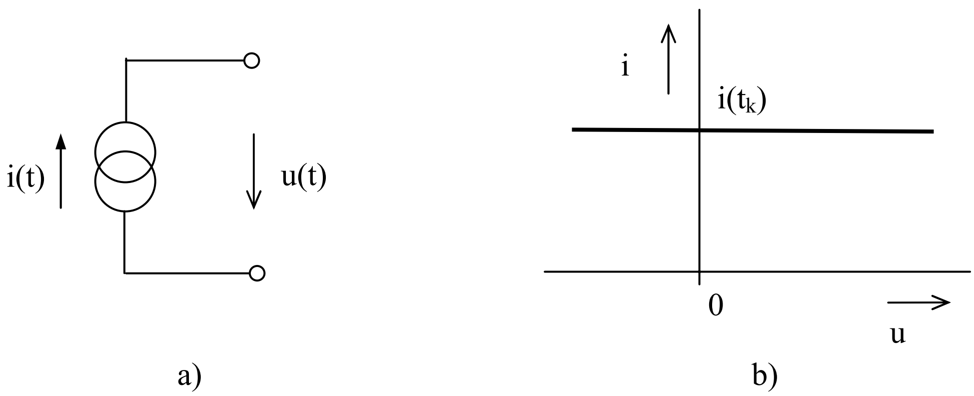
Reálný zdroj napětí se tak nechová a má jistá **omezení**. Roste-li zatěžovací proud, jeho výstupní napětí klesá a měnit se může i časový průběh. Základním parametrem je výstupní napětí při nulovém odebíraném proudu, tj. při odpojené zátěži, značené zpravidla jako $u_i(t)$. Takový stav se nazývá jako **stav naprázdno** a příslušné svorkové napětí jako **napětí naprázdno** nebo **vnitřní napětí**, viz **Obr. 2.20a**. Reálné zdroje mohou být obecně **nelineární**, jejich zatěžovací charakteristika tedy nemusí být přímková, viz **Obr. 2.20b**. Proud i_k se zde nazývá jako **proud nakrátko**. Kdyko-li je to z hlediska funkce přípustné, nelinearitu zanedbáváme a zdroje uvažujeme jako **lineární**. Reálné zdroje napětí se dají modelovat jako vhodné kombinace zdrojů ideálních a pasivních obvodových prvků.



Obr. 2.20: Reálný zdroj napětí s příkladem zatěžovací charakteristiky

b) Nezávislý zdroj proudu

Ideální nezávislý zdroj proudu je základní aktivní prvek, který je schopen dodávat proud určitého časového průběhu nezávisle na vlastnostech připojené zátěže. Jeho schématická značka je na **Obr. 2.21a**.

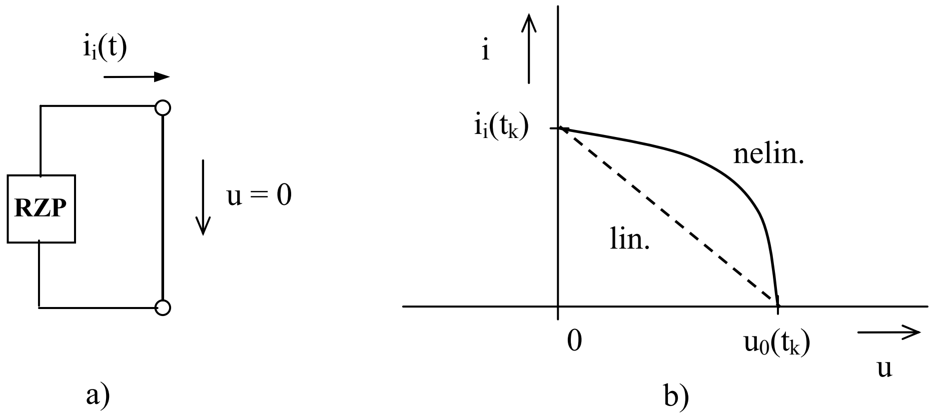


Obr. 2.21: Ideální zdroj proudu a jeho zatěžovací charakteristika

Jediným parametrem zdroje proudu je daný časový průběh jeho proudu. **Zatěžovací charakteristikou** je závislost jeho proudu na svorkovém napětí a je jí pro libovolný časový okamžik přímka rovnoběžná s osou napětí, viz **Obr. 2.21b**. Také ideální zdroj proudu má schopnost dodávat **nekonečně veliký výkon**.

Reálný zdroj proudu se tak nechová a má opět jistá omezení. Jeho proud je závislý na napětí na zátěži, se zvyšujícím se svorkovým napětím proud klesá, a může se měnit i jeho časový průběh. Základním parametrem je proud při nulovém svorkovém napětí, tzn. při zkratované zátěži, značený zpravidla $i_i(t)$. Takový stav se nazývá jako **stav nakrátko** a příslušný proud jako **proud nakrátko** nebo **vnitřní proud**, viz **Obr. 2.22a**. Reálný zdroj proudu může být obecně opět nelineární, jak je znázorněno na **Obr. 2.22b**. Napětí $u_0(t)$ zde označuje **napětí naprázdno**.

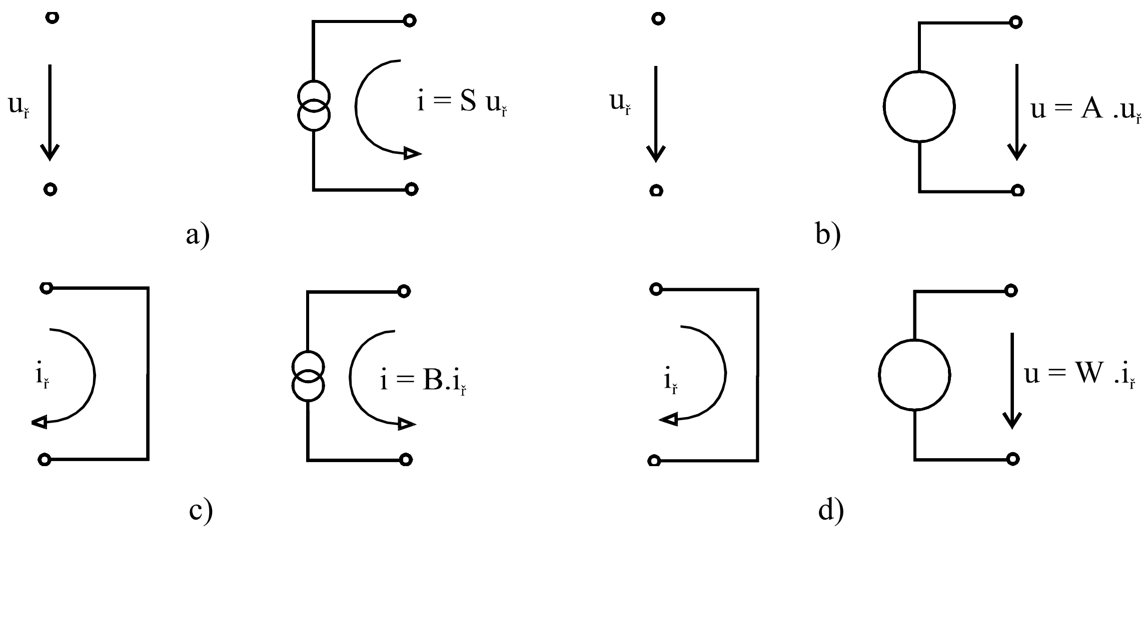
Všechny **skutečné zdroje** (tj. různé monočlánky, akumulátory, dynama, transformátory apod.) se svou podstatou **blíží** spíše **zdrojům napěťovým**. Zdroje proudu jsou realizovány elektronickou cestou, při využití tzv. zpětnovazebních obvodů.



Obr. 2.22: Reálný zdroj proudu s příkladem zatěžovací charakteristiky

2.3.2 Řízené (závislé) zdroje elektrické energie

Řízené zdroje elektrické energie slouží pro modelování tzv. aktivních elektronických prvků (např. tranzistorů) nebo celých složitých obvodů. Takový zdroj zprostředkovává přenos energie ze zdroje napájecího napětí (obvykle stejnosměrného) do obvodu a je přitom řízen zpracovávaným signálem. **Ideální řízený zdroj** neodebírá ze signálového obvodu energii, je schopen dodávat nekonečný výkon a jeho řízené napětí nebo proud je nezávislé na zatížení. To neplatí pro **reálné řízené zdroje**, podobně jako tomu bylo u zdrojů nezávislých. Podobně se i jejich vlastnosti dají modelovat kombinacemi ideálních řízených zdrojů a pasivních prvků. Protože máme zdroje napětí a proudu a protože řídicí veličinou může být také napětí nebo proud, rozlišujeme **čtyři typy** řízených zdrojů. Nejdůležitější jsou **lineární** řízené zdroje, u nichž platí lineární vztah mezi řídicí a řízenou veličinou, a které jsou charakterizovány jediným parametrem, viz **Obr. 2.23**.



Obr. 2.23: Ideální řízené zdroje elektrické energie

a) Zdroj proudu řízený napětím, ZPŘN

Schéma zdroje s označením důležitých veličin je na **Obr. 2.23a**. Výstupní proud zdroje je úměrný řídicímu napětí mezi vstupními svorkami. Konstanta úměrnosti *S* má rozměr vodivosti (často se označuje g_m) a nazývá se strmost nebo přenosová (převodní) vodivost zdroje. Tento zdroj se používá v náhradních schématech tzv. bipolárních i unipolárních tranzistorů (tranzistorů řízených elektrickým polem, FET).

b) Zdroj napětí řízený napětím (ideální zesilovač napětí), ZNŘN

Schéma zdroje je na **Obr. 2.23b**. Výstupní napětí zdroje je úměrné řídicímu napětí mezi vstupními svorkami. Konstanta úměrnosti *A* je bezrozměrná a nazývá se napěťové zesílení.

c) Zdroj proudu řízený proudem (ideální zesilovač proudu), ZPŘP

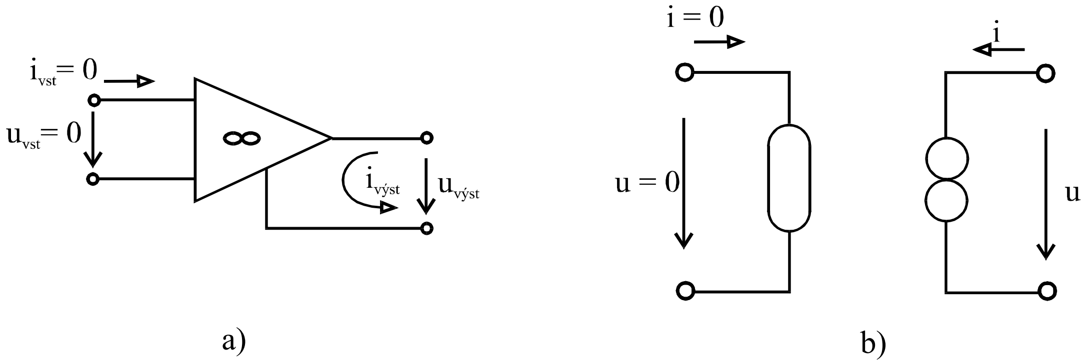
Schéma zdroje je na **Obr. 2.23c**. Výstupní proud je úměrný řídicímu proudu, který protéká zkratovou spojkou na vstupu zdroje. Konstanta úměrnosti *B* je bezrozměrná (někdy se značí β) a nazývá se proudové zesílení.

d) Zdroj napětí řízený proudem, ZNŘP

Schéma zdroje je na **Obr. 2.23d**. Výstupní napětí je úměrné řídicímu proudu. Konstanta úměrnosti *W* má rozměr odporu a nazývá se přenosový (převodní) odpor.

2.3.3 Ideální operační zesilovač (IOZ)

Ideální operační zesilovač patří k základním obvodovým prvkům. Je definován jako **limitní případ** kteréhokoli ze čtyř typů řízených zdrojů, jestliže parametr příslušného zdroje *S, A, B* nebo *W* roste nade všechny meze. V praxi se mu svými vlastnostmi blíží reálný operační zesilovač nebo tzv. transimpedanční zesilovač. Tyto prvky jsou vyráběny ve formě integrovaných obvodů. Integrované operační zesilovače běžně dostupné na trhu mívají napěťové zesílení řádově ve statisících až milionech. Přes to, že jejich zesílení není nekonečně veliké, v mnoha aplikacích se dá za takové pokládat. Schematická značka ideálního operačního zesilovače je na **Obr. 2.24a**.



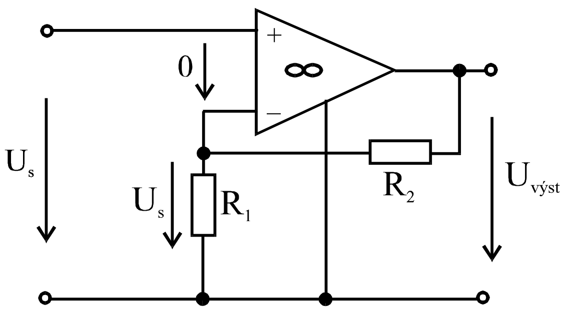
Obr. 2.24: Ideální operační zesilovač a jeho nulorový model

Protože samozřejmě očekáváme, že výstupní veličiny (napětí i proud na výstupu) operačního zesilovače mají konečnou velikost a zesilovač má nekonečně veliké napěťové i proudové zesílení, musí být napětí i proud na vstupu současně rovny nule. Říkáme, že ideální operační zesilovač udržuje na vstupních svorkách tzv. **virtuální nulu** . To je možné proto, že ideální operační zesilovač se používá vždy v zapojení se **zpětnou vazbou** signálu z výstupu na vstup.

Ideální operační zesilovač lze pokládat za jeden ze **základních obvodových prvků**, protože jiné prvky, např. všechny čtyři řízené zdroje, lze nahradit zapojením, složeným z ideálního operačního zesilovače a rezistorového obvodu zpětné vazby.

Příklad 2.1:

Na **Obr. 2.25** je nakresleno schéma obvodu s ideálním operačním zesilovačem a dvojicí rezistorů R_1, R_2 (zesilovač napětí v neinvertujícím zapojení).



Obr. 2.25: Zesilovač s IOZ v neinvertujícím zapojení

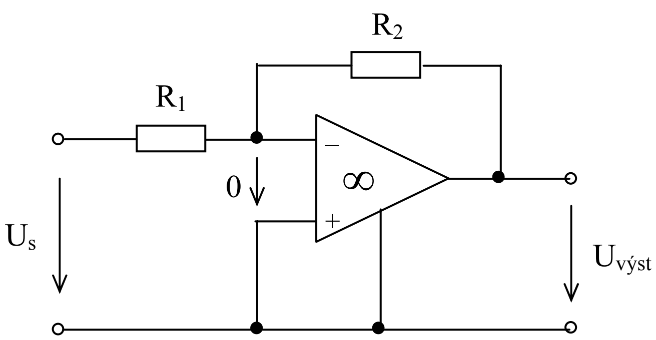
Protože vstupní napětí IOZ je rovno nule, je napětí na rezistoru R_1 rovno napětí zdroje signálu U_s. Proud rezistorem je tedy U_s/R_1. Stejně veliký proud protéká i rezistorem R_2 a proto

$$U_{výst} = U_s\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) = A.U_s \quad .$$

Obvod jako celek se tedy chová jako ideální zesilovač napětí se zesílením $A = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)$.

Příklad 2.2:

Na **Obr. 2.26** je jiné schéma obvodu s IOZ (zesilovač napětí v invertujícím zapojení).



Obr. 2.26: Zesilovač s IOZ v invertujícím zapojení

Protože vstupní napětí IOZ je rovno nule, je napětí na rezistoru R_1 rovno napětí zdroje signálu U_s. Proud rezistorem je tedy U_s/R_1. Stejně veliký proud protéká i rezistorem R_2 a proto

$$U_{výst} = -U_s\frac{R_2}{R_1} = A.U_s \quad .$$

Poznámka:

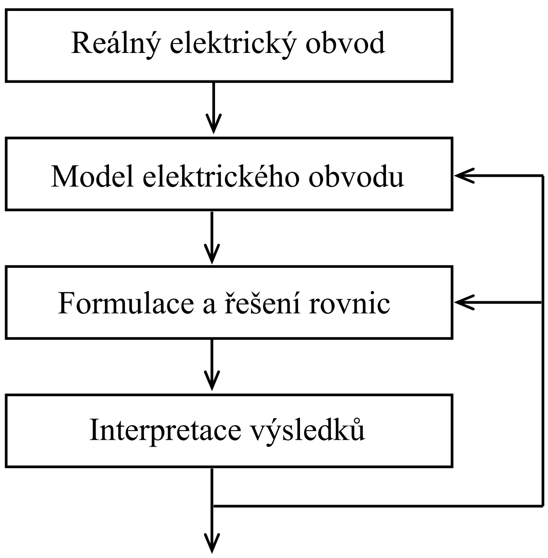
Ideální operační zesilovač udržuje na vstupu současně nulové napětí i nulový proud. To se někdy modeluje zvláštním obvodovým prvkem, tzv. **nulátorem**, zapojeným do obvodu místo vstupních svorek zesilovače. Na druhé straně napětí i proud na výstupu jsou dány výhradně vlastnostmi obvodu zpětné vazby a na zesilovači vlastně nezávisejí. To se může modelovat obvodovým prvkem nazývaným **norátor**. Místo ideálního operačního zesilovače můžeme tedy použít náhradního schématu s dvojicí nulátor-norátor, kterou nazýváme **nulor**, viz **Obr. 2.24b**. Je-li v obvodu větší množství nulátorů a norátorů, lze vždy libovolnou jejich dvojici vybrat a pokládat ji za náhradní schéma jednoho IOZ. Principiálně tedy můžeme dosáhnout stejné funkce obvodu s celou řadou různých variant zapojení s IOZ.

3 Základní metody analýzy elektrických obvodů

3.1 Úvod

Analýzou elektrické soustavy rozumíme **výpočet všech napětí** a **všech proudů** v soustavě. Při analýze se snažíme soustavu rozdělit na jednotlivé obvodové prvky, které popíšeme podle jejich dominantních vlastností. Pokud je to možné, ostatní vlastnosti zanedbáme nebo je vyjádříme pomocí dalších, přídavných, tzv. parazitních obvodových prvků. Například dominantní vlastností reálné cívky je její schopnost akumulovat energii v magnetickém poli. Reálná cívka je však navinuta z vodiče o konečném elektrickém odporu, takže v ní vznikají ztráty Jouleovým teplem. Pokud tyto ztráty nemůžeme v dané aplikaci zanedbat, bereme je v úvahu např. tím, že pro cívku sestavíme náhradní schéma obsahující sériový rezistor. Často musíme uvažovat i kapacity cívky (mezi jednotlivými závity, mezi vývody), viz např. modely na **Obr. 2.17**. Podobná situace nastává i u jiných částí analyzované soustavy (reálný kondenzátor, dioda, tranzistor, integrovaný obvod aj).

Analýza obvodu tedy začíná sestavením modelu reálného elektrického obvodu. Metodou analýzy pak rozumíme způsob matematického popisu vztahů mezi veličinami daného modelu, tj. napětími a proudy, případně i elektrickými náboji resp. magnetickými toky. Nakonec se provádí interpretace výsledků získaných pomocí modelu a reálného obvodu. Postup při analýze obvodu je schematicky znázorněn na **Obr. 3.1**.



Obr. 3.1: Postup při analýze elektrických obvodů

Metodu analýzy volíme podle různých hledisek:

1. Podle toho, které procesy u daného obvodu sledujeme (poloha stejnosměrných pracovních bodů, ustálený stav, přechodný stav, ...)
2. Podle vstupního signálu (malý, velký signál, periodický, jednorázový, ...)
3. Podle kmitočtu (nulový, nízký, vysoký, nekonečný)
4. Podle linearity či nelinearity obvodu
5. Podle složitosti obvodu
6. Podle prostředků, které máme při analýze k dispozici (kalkulátor, počítač, speciální matematické programy, ...)

Analýza obvykle není jednorázový akt. Může probíhat i v několika cyklech, při kterých postupně získáváme podrobnější znalosti o zkoumaném obvodu a často jsme nuceni i hlouběji studovat principy procesů, které v obvodu probíhají. V každém případě musíme dosažené výsledky kriticky hodnotit a pokud je to možné, srovnat řešení získaná pomocí více postupů, případně s výsledky experimentu.

V této kapitole bude probráno několik základních metod analýzy **lineárních obvodů**. Budeme je přitom aplikovat na tzv. **obvody nesetrvačné**, tj. obvody, ve kterých nejsou žádné akumulační prvky. Napětí a proudy (odezvy) nesetrvačného obvodu v každém okamžiku závisejí pouze na napětích resp. proudech zdrojů budicího signálu v tomtéž okamžiku. Rychlost, jakou se vstupní signály mění v čase, nehraje žádnou roli. Je-li tedy signál např. obdélníkový, mají i odezvy obdélníkový průběh, mění-li se s časem harmonicky (sinusově, kosinusově), jsou i odezvy harmonické. Při analýze těchto obvodů vycházíme pro jednoduchost z předpokladu konstantních (také se říká "stejnosměrných") vstupních napětí a proudů. Proto se nesetrvačné obvody často označují jako **obvody stejnosměrné**. Výsledky analýzy jsou však platné pro libovolné časové průběhy vstupních signálů, viz kap. 5.

Metody, které se naučíme používat k analýze nesetrvačných obvodů, lze po určitém zobecnění použít i pro analýzu v dalších situacích, např. pro tzv. symbolický výpočet harmonického ustáleného stavu v lineárních obvodech, nebo pro analýzu přechodných jevů operátorovou metodou. Tyto metody však budou náplní až kursu *Elektrotechnika 2*.

Všechny metody analýzy obvodů jsou založeny na využití Kirchhoffových zákonů. Protože přímá aplikace Kirchhoffových zákonů vede obecně na veliký počet nezávislých rovnic (při n uzlech a v větvích v obvodu formulujeme $n-1$ rovnic podle I. KZ a v rovnic podle II. KZ), používáme postupy, které počet neznámých snižují a tím proces analýzy zjednodušují.

Tyto postupy můžeme rozdělit na:

a. Metody analýzy pro speciální případy
b. Univerzální metody analýzy.

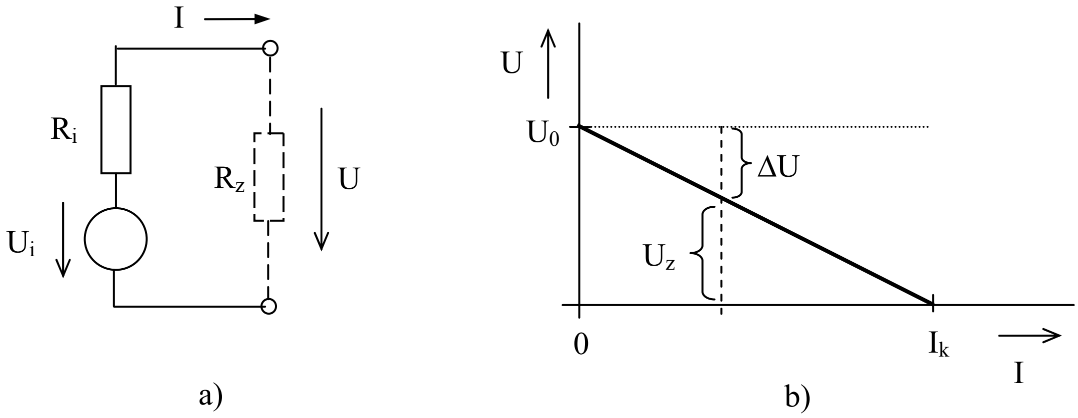
Metody "**pro speciální případy**" se vyznačují tím, že při jejich použití vystačíme se základními matematickými operacemi, tj. sečítáním (odečítáním), násobením a dělením. Jsou proto vhodné pro "**ruční**" výpočty s kalkulátorem, bez počítače. Na druhé straně však jsou použitelné pouze pro řešení určitých, jednodušších skupin obvodů s jediným zdrojem signálu. Dále vyžadují promyšlenou volbu jednotlivých kroků při analýze obvodu. Tím jsou do značné míry závislé na osobě, která řešení provádí a málo vhodné pro počítač.

"**Univerzálními**" metodami dokážeme analyzovat obvody libovolné složitosti. Musíme však vždy řešit soustavu rovnic, které jsme formulovali pro určitou množinu nezávislých obvodových veličin. Rovnice lze formulovat podle určitých pevných algoritmů a proto tento krok může být automatizován a svěřen počítači. Metody vyžadují použití počítače s vhodnými matematickými programy pro řešení soustav rovnic s reálnými nebo i komplexními koeficienty. "Ručně" jimi řešíme jen velmi jednoduché obvody.

Než přistoupíme k vlastním metodám analýzy lineárních stejnosměrných obvodů, bude užitečné podrobněji rozebrat **vlastnosti reálného stejnosměrného zdroje** napětí a proudu, resp. jejich lineárních modelů.

3.2 Modely stejnosměrného zdroje

Základní vlastnosti **ideálního zdroje napětí** byly diskutovány v kapitole 2.3.1, a to pro obecný časový průběh napětí. Musí být tudíž platné i pro napětí stejnosměrné. Vyjdeme-li z představy reálného zdroje napětí dle **Obr. 2.20**, můžeme uvažovat lineární model, tzv. **náhradní schéma zdroje**, viz **Obr. 3.2a**. Jeho zatěžovací charakteristika je uvedena na **Obr. 3.2b**.



Obr. 3.2: Lineární model reálného stejnosměrného zdroje napětí

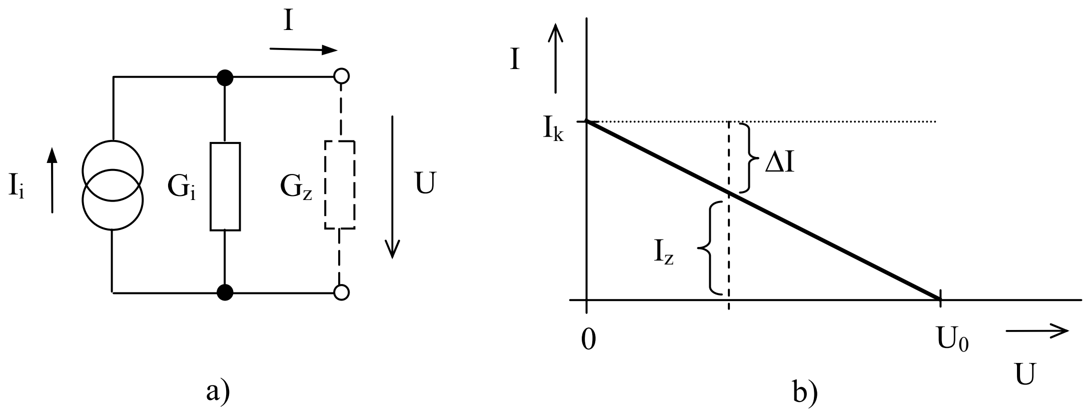
Náhradní schéma se skládá z ideálního zdroje napětí U_i, tzv. **vnitřního napětí**, v sérii s lineárním rezistorem R_i, tzv. **vnitřním odporem**. Výstupní napětí takového náhradního obvodu je rovno

$$U = U_i - R_i.I = U_i - \Delta U \quad , \tag{3.1}$$

stejně jako u původního reálného zdroje. Nazývá se **svorkovým napětím**. Je-li zatěžovací proud roven nule, říkáme, že zdroj pracuje **naprázdno**. Jak vyplývá z rovnice (3.1), jeho výstupní napětí, tzv. **napětí naprázdno**, je pak rovno $U_0 = U_i$. Odebíráme-li ze zdroje proud *I*, výstupní napětí klesne o úbytek úměrný velikosti tohoto proudu, tj. $\Delta U = R_i.I$. Je zřejmé, že čím je vnitřní odpor R_i menší, tím je výstupní napětí zdroje méně závislé na zatěžovacím proudu a tím je zdroj tzv. „tvrdší“, tj. bližší **ideálnímu zdroji napětí**, který má **vnitřní odpor rovný nule**. Pokud to zdroj snese, můžeme pokračovat ve zvyšování zatěžovacího proudu tak dlouho, až výstupní napětí poklesne na nulu. Dostáváme se tak do situace, kdy jsou svorky zdroje spojeny nakrátko a zkratovou spojkou teče maximální možný proud, tzv. **proud nakrátko**, který je roven $I_k = U_i / R_i$. Přímková zatěžovací charakteristika zdroje na **Obr. 3.2b** pak protíná vodorovnou osu (osu proudu) v bodě, který odpovídá proudu nakrátko I_k, a svislou osu (osu napětí) v bodě, který je bodem napětí naprázdno U_0.

Hledáme-li tedy **parametry náhradního schématu** reálného zdroje napětí, musíme provést dvě měření. Především změříme napětí naprázdno U_0. Použijeme k tomu voltmetr s dostatečně vysokým vstupním odporem, aby ze zdroje odebíral prakticky zanedbatelný proud. Pokud to měřený zdroj snese a je schopen bez poškození pracovat po dobu měření nakrátko, změříme také proud nakrátko I_k ampérmetrem se zanedbatelně malým odporem a vypočítáme vnitřní odpor jako $R_i=U_o/I_k$. Jestliže zdroj není dimenzován na tak veliké proudy, musíme jej zatěžovat pouze v mezích dovoleného proudu I_{max}, změřit odpovídající pokles výstupního napětí a vnitřní odpor vypočítat z tohoto poklesu.

Základní vlastnosti **ideálního zdroje proudu** byly opět diskutovány v kapitole 2.3.1, a to pro obecný časový průběh proudu. Musí být tudíž platné i pro proud stejnosměrný. Vyjdeme-li z představy reálného zdroje proudu dle **Obr. 2.22**, můžeme uvažovat lineární model (**náhradní schéma**), podle **Obr. 3.3a**. Jeho zatěžovací charakteristika je na **Obr. 3.3b**.



Obr. 3.3: Lineární model reálného stejnosměrného zdroje proudu

Náhradní schéma se skládá z ideálního zdroje proudu I_i, tzv. **vnitřního proudu**, paralelně s lineárním konduktorem G_i, tzv. **vnitřní vodivostí**. Výstupní proud takového náhradního obvodu je roven

$$I = I_i - G_i.U = I_i - \Delta I \quad , \qquad (3.2)$$

stejně jako u původního reálného zdroje. Je-li napětí na zátěži rovno nule, tj. při zkratování výstupních svorek, zdroj pracuje ve stavu **nakrátko**. Jak vyplývá z rovnice (3.2), jeho výstupní proud, tzv. **proud nakrátko**, je roven $I_k = I_i$. Pokud má vodivost zátěže konečnou hodnotu, výstupní napětí U je od nuly různé a výstupní proud klesne o hodnotu úměrnou velikosti tohoto napětí, tj. $\Delta I = G_i.U$. Je zřejmé, že čím je vnitřní vodivost G_i menší, tím je výstupní proud zdroje méně závislý na vlastnostech zátěže a tím je zdroj tzv. „tvrdší“, tj. bližší **ideálnímu zdroji proudu**, který má **vnitřní vodivost rovnu nule**. Pokud bychom měnili vodivost zátěže až k nule, tj. svorky zátěže budou rozpojeny, výstupní proud poklesne na nulu a objeví se na nich maximální možné napětí, tzv. **napětí naprázdno**. Protože pak celý vnitřní proud I_i teče smyčkou s vnitřní vodivostí G_i, je toto napětí rovno $U_0 = I_i/G_i$. Zatěžovací charakteristika zdroje na **Obr. 3.3b** pak protíná vodorovnou osu (osu napětí) v bodě, který odpovídá napětí naprázdno U_0, a svislou osu (osu proudu) v bodě, který je bodem proudu nakrátko I_k.

Pokud se v praxi setkáváme se zdroji proudu, jde téměř vždy o zařízení, která byla sestavena synteticky tak, aby se jako zdroj proudu chovala. Jako příklad lze uvést zdroje konstantního stejnosměrného proudu pro nastavení pracovních bodů tranzistorů v analogových integrovaných obvodech nebo zdroj konstantního střídavého proudu pro elektrickou obloukovou svářečku. V obou případech jde o relativně složité zapojení s vnitřní regulační smyčkou vybavenou silnou zápornou zpětnou vazbou. Takové zdroje proudu se pak svým chováním blíží zdrojům ideálním, neboť právě zpětná vazba zajišťuje, že jejich vnitřní odpor se blíží k nekonečnu, tj. vnitřní vodivost k nule.

Budeme-li uvažovat **reálný zdroj elektrické energie**, můžeme pro něj sestavit oba dva typy náhradních schémat, aniž bychom přitom zkoumali, zda se svými vlastnostmu blíží více zdroji napětí nebo zdroji proudu. Pak se tyto náhradní schémata označují jako **napěťový** (**Obr. 3.2**) nebo **proudový** (**Obr. 3.3**) **náhradní model**. Mají-li ovšem popisovat tentýž reálný zdroj elektrické energie, musí se chovat ekvivalentně vůči jakéko-li zátěži. Z této úvahy lze nalézt přepočetní vztahy mezi oběma modely, tj. známe-li parametry U_i a R_i, můžeme stanovit parametry I_i a G_i, a naopak:

napěťový model → **proudový** model

$$I_i = \frac{U_i}{R_i} \quad \text{a} \quad G_i = \frac{1}{R_i} , \qquad (3.3)$$

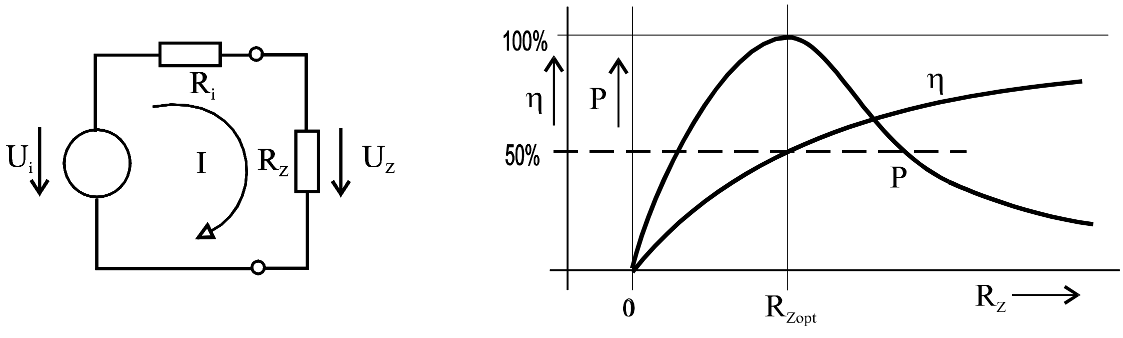
proudový model → **napěťový** model

$$U_i = \frac{I_i}{G_i} \quad \text{a} \quad R_i = \frac{1}{G_i} . \qquad (3.4)$$

Odvození těchto vztahů je snadné uvážíme-li, že oba modely se musí chovat ekvivalentně také ve svých mezních stavech, tj. ve stavu **naprázdno**, kdy je napětí $U_0 = U_i$, a ve stavu **nakrátko**, kdy je proud $I_k = I_i$.

3.3 Přenos energie ze zdroje do odporové zátěže. Výkonové přizpůsobení

Uvažujme, že máme **dán reálný zdroj elektrické energie** jeho vnitřním napětím U_i nebo proudem I_i a vnitřním odporem R_i . Na svorky zdroje je připojen **zatěžovací odpor** R_z, jak ukazuje **Obr. 3.4a**.



a) b)

Obr. 3.4: K výkonovému přizpůsobení zdroje a spotřebiče

Zajímáme se o velikost **výkonu** dodávaného **do zatěžovacího odporu** a o podmínky, za kterých je tento výkon **maximální**. V praxi může jít např. o situaci, kdy zdrojem energie je přijímací anténa a spotřebičem vstupní odpor přijímače. Energie, která je k dispozici, je velmi omezená a proto se snažíme o co největší její využití. Dosáhneme-li maximálního možného výkonu signálu na vstupu přijímače, bude snadnější získat kvalitní příjem s nízkou úrovní rušivých signálů (např. šumu).

Výkon v zátěži je roven součinu proudu I a napětí na zátěži U_z. Proud obvodem je zřejmě $I = \frac{U_i}{R_i + R_z}$ a napětí na zátěži $U_z = U_i \frac{R_z}{R_i + R_z}$. Dostáváme proto

$$P_z = U_z.I = U_i^2 \frac{R_z}{(R_i + R_z)^2} \quad . \qquad (3.5)$$

Výkon závisí na parametrech zdroje, které jsou předem dány, a na velikosti zatěžovacího odporu R_z, jehož optimální hodnotu hledáme. Výkon je nulový jak v případě, že $R_z=0$ (napětí na zátěži je rovno nule), tak i v případě, že R_z roste nade všechny meze (proud je nulový). Pro určitou hodnotu $R_z=R_{zopt}$ dosahuje výkon svého maxima. Z matematického hlediska je vztah (3.5) funkcí jedné proměnné $P_z = f(R_z)$. Polohu tohoto maxima proto vypočítáme tak, že první derivaci výkonu podle zatěžovacího odporu položíme rovnu nule, tj.

$$\frac{dP_z}{dR_z} = U_i^2 \frac{(R_i + R_z)^2 - R_z.2.(R_i + R_z)}{(R_i + R_z)^4} = 0 \quad . \qquad (3.6)$$

Protože je zřejmě $U_i \neq 0$ a současně $R_i + R_z \neq 0$, dostaneme pro **optimální velikost zatěžovacího odporu**

$$R_{zopt} = R_i \quad . \qquad (3.7)$$

Zatěžovací odpor musí být roven vnitřnímu odporu zdroje. Odpovídající výkon v zátěži, tj. **maximální využitelný výkon zdroje** pak bude

$$P_{\max} = \frac{U_i^2}{4R_i} \quad . \qquad (3.8)$$

Poznamenejme, že podmínka, kterou jsme právě odvodili, vycházela z požadavku maximálního využití schopností daného zdroje elektrické energie. Nebudeme se ovšem snažit ji aplikovat např. na případ, kdy odebíráme energii z elektrorozvodné sítě. Tam půjde o jinou situaci a tu posuzujeme podle tzv. účinnosti přenosu energie, dané jako poměr výkonu odevzdaného do zátěže k výkonu, který zdroj vnitřního napětí U_i dodává do celého obvodu

$$\eta = \frac{P_z}{P_i} = \frac{U_i^2 \dfrac{R_z}{(R_i + R_z)^2}}{U_i^2 \dfrac{1}{R_i + R_z}} = \frac{R_z}{R_i + R_z} \quad . \qquad (3.9)$$

Účinnost je nulová, pracuje-li zdroj nakrátko, blíží se však asymptoticky k jedné, roste-li zatěžovací odpor nade všechny meze. Křivky závislostí účinnosti i užitečného výkonu na zatěžovacím odporu jsou nakresleny na **Obr. 3.4b**. Za podmínek, kdy zdroj odevzdává **maximální výkon**, je **účinnost** pouze **padesátiprocentní**. Odebíráme-li energii z veřejné rozvodné sítě, musíme se snažit o co největší účinnost přenosu, o minimální ztráty na odporech vedení a na odporech pomocných zařízení, která přenos energie zabezpečují. Za této situace tedy musí být zatěžovací odpor podstatně větší než vnitřní odpor zdroje.

Příklad 3.1:

Monočlánek typu R 14 má napětí naprázdno rovno U_o=*1,5 V*. Odebíráme-li z něj proud I_z = *0,5 A*, klesne výstupní napětí na hodnotu *1,1 V*. Určete prvky náhradního schématu monočlánku.

Řešení:

Protože pokles napětí $\Delta U = 1{,}5 - 1{,}1 = 0{,}4V$ byl při zatěžovacím proudu *0,5 A,* je vnitřní odpor roven R_i = *0,4/0,5 = 0,8 Ω*. Vnitřní napětí zdroje v náhradním schématu je pak U_i=U_o=*1,5 V*.

Příklad 3.2:

Startér automobilu potřebuje pro bezpečný start napětí alespoň *10 V* a odebírá přitom proud *80 A*. Jaký největší vnitřní odpor smí mít akumulátorová baterie, má-li napětí naprázdno U_o=*12 V*?

Řešení:

Protože je při zatěžovacím proudu *80 A* dovolený úbytek napětí $\Delta U = 2V$, nesmí být vnitřní odpor větší než *2/80=0,025 Ω = 25 mΩ*.

Příklad 3.3:

Stejnosměrný zdroj napětí připojený k rezistoru R_1 = *68 Ω* způsobuje proud I_1 = *150 mA* a k rezistoru R_2 = *100 Ω* pak proud I_2 = *106 mA*. Vypočtěte parametry napěťového modelu tohoto zdroje.

Řešení:

Vyjdeme z rovnice pro svorkové napětí $U = RI = U_i - R_i I$, do které postupně dosadíme zadané hodnoty. Dostaneme tak soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé veličiny U_i a R_i

$$R_1 I_1 = U_i - R_i I_1 \quad , \quad R_2 I_2 = U_i - R_i I_2 \ .$$

Jejich řešením (např. odečtením druhé rovnice od první) obdržíme

$$R_i = \frac{R_1 I_1 - R_2 I_2}{I_2 - I_1} = 9.\overline{09}\,\Omega \quad \text{a dále} \quad U_i = (R_1 + R_i) I_1 = (R_2 + R_i) I_2 = 11.56\overline{36}\,\Omega \ .$$

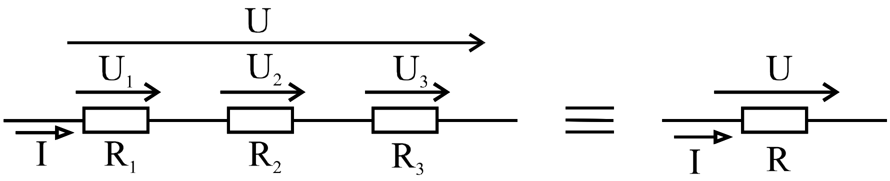
3.4 Metody analýzy pro speciální případy

3.4.1 Metoda postupného zjednodušování obvodu

Metoda **postupného zjednodušování** je založena na předpokladu, že v obvodu můžeme identifikovat kombinace rezistorů, které jsou zapojeny do série nebo paralelně a nahradit je jediným rezistorem. To nám umožní nalézt celkový odpor obvodu, vypočítat proud dodávaný do obvodu zdrojem (předpokládáme, že je v obvodu jen jediný) a postupně pak všechny zbývající obvodové veličiny.

Sériové spojení rezistorů

Pod sériovým spojením rozumíme takovou kombinaci, kdy všemi rezistory protéká týž proud. Celkové napětí na sériové kombinaci je pak rovno součtu dílčích úbytků. Příklad takového spojení se třemi rezistory ukazuje **Obr. 3.5**.



Obr. 3.5: Sériové spojení rezistorů

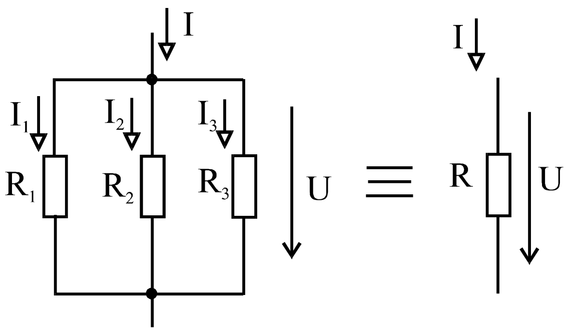
Protože celkové napětí $U = U_1 + U_2 + U_3 = I(R_1 + R_2 + R_3) = I.R$, je celkový odpor kombinace roven součtu dílčích odporů $R = R_1 + R_2 + R_3$. Obecně pro *n* rezistorů v sérii

$$R = \sum_{j=1}^{n} R_j \quad . \tag{3.10}$$

Výsledný odpor je vždy větší než největší z odporů v sériové kombinaci. Jsou-li pak rezistory dva a platí-li $R_1 \le R_2$, je zřejmé, že výsledná hodnota *R* leží v intervalu mezi velikostí většího odporu a jejím dvojnásobkem, tj. $R_2 < R \le 2R_2$.

Paralelní spojení rezistorů

Pod paralelním spojením rozumíme takovou kombinaci, kdy na všech rezistorech je stejně veliké napětí. Celkový proud, vstupující do paralelní kombinace, je roven součtu dílčích proudů. Příklad se třemi rezistory je na **Obr. 3.6**.



Obr. 3.6: Paralelní spojení rezistorů

Platí zřejmě

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad , \tag{3.11}$$

obecně pak

$$R = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}} \quad , \qquad \text{resp.} \qquad G = \sum_{j=1}^{n} G_j \quad . \tag{3.12}$$

Výsledný odpor je vždy menší než nejmenší z paralelně spojených odporů. Pro jednoduchost používáme někdy pro paralelní spojení zkráceného značení

$$R = R_1 \,//\, R_2 \,//...//\, R_n \quad . \tag{3.13}$$

Pro praktické použití je dobré pamatovat si upravený výraz pro výsledný odpor paralelního spojení dvou rezistorů

$$R = R_1 \,//\, R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.14}$$

a vědět, že velikost výsledného odporu leží v intervalu mezi polovinou a celou hodnotou menšího z odporů, tj. je-li opět $R_1 \le R_2$, platí $R_1 / 2 \le R < R_1$, viz ***Příklad 3.4***.

Příklad 3.4:

1. $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$; R musí ležet mezi 5 a 10 Ω. Skutečně R = 10.20/30 = 6.6667 Ω

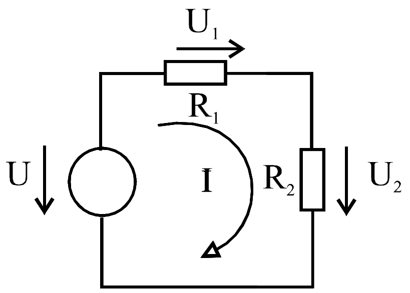
2. $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 1000\Omega$; $R = 10.1000/1010 = 9.9009901\ \Omega$

3. $R_1 = R_2 = 10\Omega$; $R = R_1 / 2 = 5\Omega$.

Aplikaci metody postupného zjednodušování obvodu budeme ilustrovat na řešení několika jednoduchých obvodů.

Příklad 3.5:

Na **Obr. 3.7** je schéma tzv. **odporového děliče napětí**, který se skládá ze dvou rezistorů R_1 a R_2 a je napájený napětím U.



Obr. 3.7: Odporový dělič napětí

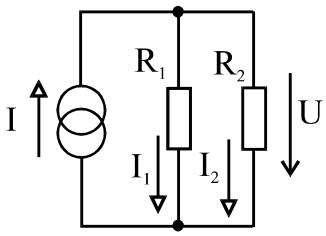
Hledáme velikosti napětí U_1 a U_2 na obou rezistorech. Protože celkový odpor obvodu je $R_1 + R_2$, je proud obvodem $I = U/(R_1 + R_2)$ a napětí na rezistorech $U_1 = IR_1$ a $U_2 = IR_2$. Po dosazení dostáváme vzorce

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{a} \quad U_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad . \tag{3.15}$$

Tento výsledek lze zobecnit i na dělič složený z většího počtu rezistorů v sérii: napětí na výstupu je rovno součinu napětí zdroje a zlomku, v jehož čitateli je odpor, z něhož je výstupní napětí odebíráno a ve jmenovateli celkový odpor děliče. Poznamenejme ještě, že zlomek, kterým vstupní napětí násobíme, je bezrozměrný a nazývá se **činitel přenosu napětí**.

Příklad 3.6:

Na **Obr. 3.8** je schéma tzv. **odporového děliče proudu**, který se skládá ze dvou rezistorů spojených paralelně a je napájený ze zdroje proudu *I*. Zajímáme se o to, jak se vstupní proud dělí na dílčí proudy I_1 a I_2.



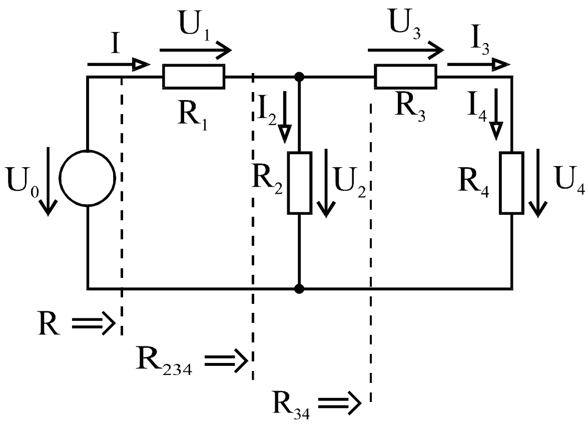
Obr. 3.8: Odporový dělič proudu

Protože napětí $U = I.R = I\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, jsou proudy větvemi rovny $I_1 = \dfrac{U}{R_1}$ a $I_2 = \dfrac{U}{R_2}$, tedy po dosazení

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2} = I\frac{G_1}{G_1 + G_2} \quad \text{a} \quad I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2} = I\frac{G_2}{G_1 + G_2} \quad . \tag{3.16}$$

Příklad 3.7:

Jako příklad poněkud složitějšího obvodu uvažujme tzv. **příčkový článek** na **Obr. 3.9**.



Obr. 3.9: Příčkový článek v metodě postupného zjednodušování

Parametry obvodových prvků jsou: $R_1 = 15\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 8\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $U_0 = 5V$. Rezistory R_3 a R_4 jsou v sérii. Proto celkový odpor větve vpravo od čárkované čáry je $R_{34} = 10\Omega$. Tento je paralelně s rezistorem R_2. Tedy $R_{234} = R_2 // R_{34} = 10 // 10 = 5\Omega$. Celkový odpor obvodu, k němuž je připojen zdroj napětí U_0, je proto roven $R = R_1 + R_{234} = 15 + 5 = 20\Omega$. Proud I dodávaný zdrojem je $I = U_0/R = 5/20 = 0{,}25\ A$. Nyní vypočítáme zbývající napětí a proudy v obvodu. Napětí U_2 na svorkách rezistoru R_2 najdeme jako výstupní napětí děliče napájeného napětím U_0 a složeného z rezistorů R_1 a R_{234}, tj. $U_2 = U_0\, R_{234} / (R_1 + R_{234}) = 5.5/(5+15) = 1{,}25V$. Toto napětí můžeme také vypočítat jako rozdíl napájecího napětí U_0 a úbytku na R_1, tedy $U_2 = U_o - I.R_1 = 5 - 0{,}25.15 = 1{,}25V$. Proud skrze R_2 je $I_2 = U_2 / R_2 = 1{,}25/10 = 1{,}25\,A$, proto

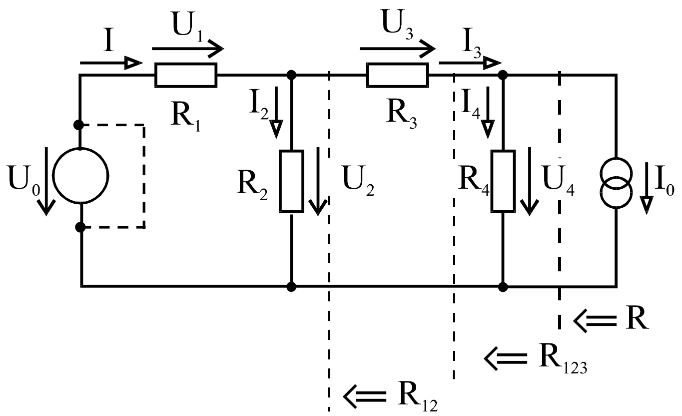
$I_3 = I_4 = I - I_2 = 0{,}25 - 0{,}125 = 0{,}125\,A$ a napětí $U_3 = 1V$, $U_4 = 0{,}25V$. Tím je analýza obvodu ukončena.

Poznámka:

Metodu postupného zjednodušování obvodu lze použít i pro analýzu obvodů s více nezávislými zdroji, avšak ve spojení s aplikací **principu superpozice** (kap. 3.6.1). V obvodu je vždy ponechán pouze **jeden zdroj**, přičemž všechny zbylé zdroje jsou **vyřazeny**, tj. nahrazeny svými vnitřními odpory. Pro ideální **zdroj napětí** to znamená jeho **zkratování**, pro ideální **zdroj proudu** pak jeho **vypojení**. Obsahuje-li obvod *n* zdrojů, postup se opakuje *n*–krát. Nakonec se provede algebraický součet dílčích řešení, tzn. součet odpovídajících si větvových proudů či napětí s ohledem na zvolené směry čítacích šipek. V praxi se uvedený postup používá obvykle pro analýzu obvodů nejvíce se dvěma či třemi zdroji.

Příklad 3.8:

Uvažujme stejný obvod jako v ***Příklad 3.7***, ale doplněný zdrojem proudu I_0 *=0,25 A* paralelně k rezistoru R_4, jak je znázorněno na **Obr. 3.10**. Napětí zdroje je v tomto případě U_0 *=2,5 V*. K řešení použijeme **principu superpozice**.

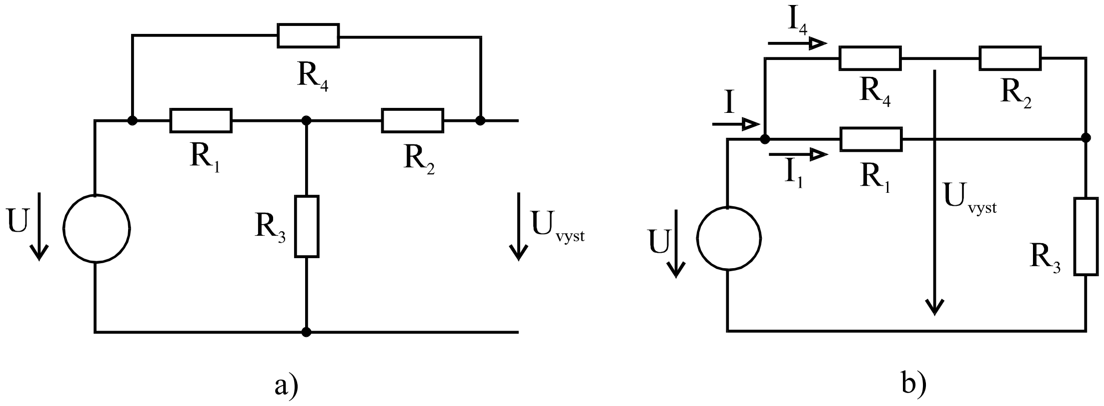


Obr. 3.10: K použití principu superpozice

Jednotlivé obvodové veličiny (napětí, proudy) budou součtem hodnot daných zdrojem napětí U_0 (to budou poloviny hodnot, vypočítaných v ***Příklad 3.7*** – označíme je jednou čarou) a hodnot vyvolaných zdrojem proudu I_0 (označíme je dvěma čarami). Počítáme-li příspěvky zdroje proudu I_0, zdroj napětí nahradíme zkratem a vypočítáme postupně celkový odpor R z hlediska svorek zdroje proudu: $R_{12} = R_1 // R_2 = 15//10 = 6\Omega$, $R_{123} = R_{12} + R_3 = 6 + 8 = 14\Omega$ a $R = R_{123} // R_4 = 14//2 = 1{,}75\Omega$. Napětí na rezistoru R_4, vyvolané pouze proudem I_0, bude $U_4'' = -I.R_4 = -0{,}4375V$ (záporné znaménko je dáno orientací proudu I_0). Dále můžeme psát: $U_2'' = -U_1'' = U_4.R_{12} / R_{123} = -0{,}1875V$, $U_3'' = 0{,}25V$, $I_1'' = 0{,}0125\,A$, $I_2'' = -0{,}01875\,A$, $I_3'' = 0{,}03125\,A$ a $I_4'' = -0{,}21875\,A$. **Výsledné hodnoty pak jsou**: $U_4 = U_4' + U_4'' = -0{,}3125V$, $U_2 = 0{,}4375V$, $U_1 = 2{,}0625V$, $I_1 = 0{,}1375\,A$, $I_2 = 0{,}04375A$, $I_3 = 0{,}09375A$, $I_4 = -0{,}15625A$.

Příklad 3.9:

Hledáme výstupní napětí $U_{výst}$ obvodu na **Obr. 3.11a** (**přemostěný T–článek**).

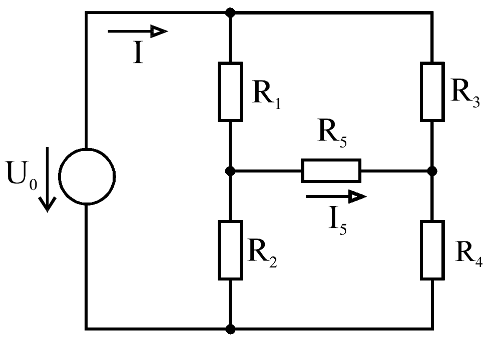


Obr. 3.11: Přemostěný T–článek v metodě postupného zjednodušování

Hodnoty parametrů prvků jsou $R_1 = 18k\Omega, R_2 = 3k\Omega, R_3 = 4k\Omega, R_4 = 6k\Omega, U = 25V$. Na původním schématu možná není na první pohled jasné, které rezistory jsou v sérii a které paralelně. Proto může být užitečné schéma překreslit, jak ukazuje **Obr. 3.11b**. Vidíme, že celkový odpor obvodu je $R = R_1 // (R_4 + R_2) + R_3 = 18 // (9 + 3) + 4 = 10k\Omega$. Proud zdroje pak je $I=U/R=2{,}5mA$ a ten se dělí na $I_1 = 0{,}83333\ mA$ a $I_4 = 1{,}66667\ mA$. Nás zajímá výstupní napětí, které je $U_{výst} = U - R_4 . I_4 = 25 - 10 = 15V$.

Příklad 3.10:

Na **Obr. 3.12** je nakresleno schéma můstku, které se používá k měření odporů nebo jejich relativně malých změn (např. při měření teploty termistory nebo platinovými teploměry nebo při měření mechanického napětí pomocí tenzometrů).



Obr. 3.12: Můstkové zapojení

Zajímáme se o proud I_5 diagonálou můstku. V tomto případě nám však ani překreslení schématu neumožní identifikovat v obvodu sériově a paralelně zapojené větve. Tento obvod, i když je velmi jednoduchý, nelze tedy metodou postupného zjednodušování řešit. Proto musíme nejdříve schéma přeměnit postupem, kterému se říká **transfigurace** (kap. 3.4.3). Řešení lze ovšem provést také některou z **univerzálních metod** řešení obvodů (kap. 3.5) nebo aplikací **věty o náhradním zdroji** (kap. 3.6.2).

Poznámka:

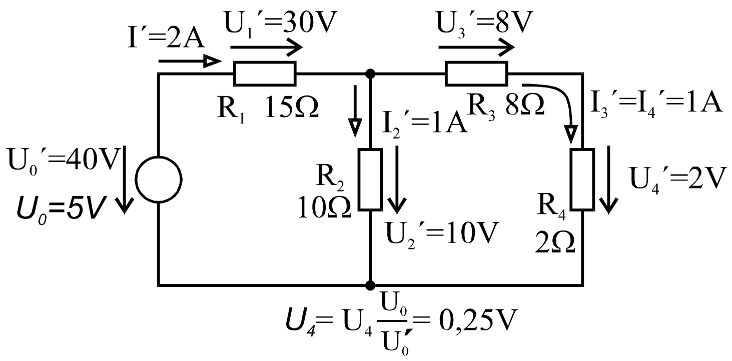
Metoda postupného zjednodušování obvodu je v principu použitelná i pro obvody s nelineárními rezistory. Pro výsledné odpory sériového nebo paralelního spojení musíme však odvodit příslušné nelineární charakteristiky (zpravidla grafickou cestou na základě daných charakteristik jednotlivých rezistorů).

3.4.2 Metoda úměrných veličin

Metoda úměrných veličin je použitelná pouze pro lineární obvody, ve kterých platí přímá úměrnost mezi napětími a proudy u každého obvodového prvku a v obvodu jako celku. Dále je nutno, aby v obvodu byl pouze jediný nezávislý zdroj napětí nebo proudu. Při použití této metody postupujeme tak, že ve vhodném místě v obvodu odhadneme (případně zvolíme) velikost napětí nebo proudu některé větve a postupně určíme tomuto odhadu odpovídající "fiktivní" napětí a proudy v celém obvodu. Vypočítáme tak i potřebnou velikost "fiktivního" napětí resp. proudu napájecího zdroje. Takto vypočítaná hodnota se obecně liší od hodnoty zadané. Protože však velikosti všech napětí a proudů v obvodu jsou přímo úměrné hodnotě parametru zdroje, dostaneme skutečné velikosti všech obvodových veličin tak, že jejich fiktivní hodnoty násobíme poměrem skutečné a fiktivní hodnoty zdroje.

Příklad 3.11:

Metodu úměrných veličin použijeme k řešení příčkového článku, který jsme již řešili metodou postupného zjednodušování v ***Příklad 3.7***. Postup řešení ilustruje **Obr. 3.13**.



Obr. 3.13: K metodě úměrných veličin

Začneme např. tím, že zvolíme proud výstupním obvodem $I_3' = I_4' = 1\,A$. To nám dovolí vypočítat fiktivní hodnoty napětí U_3' a U_4' na rezistorech R_3 a R_4 a v jejich součtu i napětí U_2' na rezistoru R_2. Dostaneme ihned proud I_2' a na základě prvního Kirchhoffova zákona i proud zdroje $I' = I_2' + I_3'$. Pak již snadno získáme úbytek U_1' na rezistoru R_1 a konečně i fiktivní napájecí napětí $U_0' = U_1' + U_2'$. Je to napětí, jaké by muselo na vstupu obvodu být, aby v něm skutečně působily "čárkované" proudy a napětí. Protože je však U_0' různé od U_0, musíme všechny hodnoty jednotlivých veličin ve schématu násobit konstantou $k = U_0/U_0' = 5/40 = 0{,}125$. Dostaneme tak hodnoty stejné jako v ***Příklad 3.7***.

Poznámky:

1. Je-li vstupní napětí např. U_0 = 5mV, tj. 1000 krát menší, jsou i všechna ostatní napětí ve stejném poměru menší, tj. místo ve voltech jsou jejich hodnoty v milivoltech, a všechny proudy místo v ampérech v miliampérech.

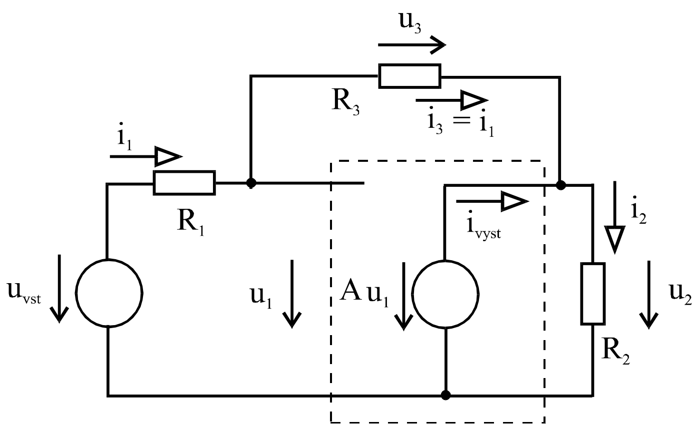
2. Jsou-li všechny hodnoty odporů udány v *kΩ*, pak všechna napětí zůstávají zachována, avšak všechny proudy jsou místo v ampérech v miliampérech.

3. Je-li vstupní napětí proměnné v čase, má např. sinusový průběh s amplitudou 5V, pak i všechny veličiny v obvodu jsou analogicky časově proměnné, v daném případě jsou tedy sinusové, s amplitudou číselně rovnou vypočítaným hodnotám (případně se záporným znaménkem před funkcí sinus).

4. Metoda úměrných veličin je v principu použitelná i pro řešení některých jednoduchých, ale pro praxi důležitých, **obvodů s řízenými zdroji**, viz ***Příklad 3.12***.

Příklad 3.12:

Na **Obr. 3.14** je zesilovač napětí (zdroj napětí řízený napětím) se zesílením *A*, napájený ze zdroje signálu u_{vst} s vnitřním odporem R_1, zatížený rezistorem R_2 a doplněný zpětnou vazbou z výstupu na vstup prostřednictvím rezistoru R_3.



Obr. 3.14: Obvod s řízeným zdrojem v metodě úměrných veličin

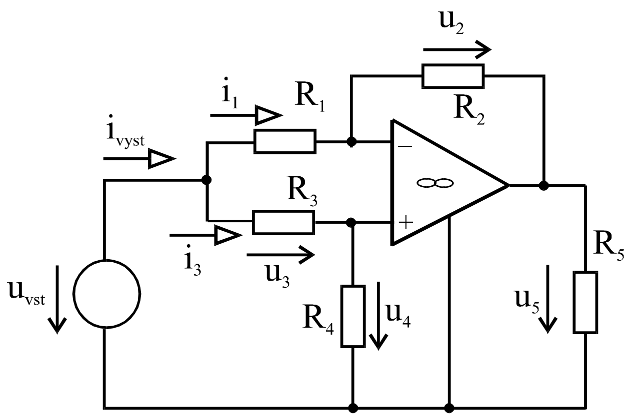
Zajímáme se především o celkové zesílení K_u, definované jako poměr výstupního napětí u_2 k napětí signálu u_{vst} a o celkový odpor R_{vst}, kterým je zatížen zdroj signálu (tzv. vstupní odpor obvodu). Při použití metody úměrných veličin odhadneme např. u_2'. To nám dovolí ihned vypočítat proud $i_2' = u_2' / R_2$ a vstupní napětí zesilovače $u_1' = u_2' / A$. Tím známe i napětí na rezistoru R_3, $u_3' = u_1' - u_2'$ a proud $i_3' = u_3' / R_3$, který je roven vstupnímu proudu i_1'. Zbývající veličiny již snadno dostaneme přímou aplikací Kirchhoffových zákonů, tj. $i_{výst}' = i_2' - i_3'$ a $u_{vst}' = R_1 i_1' + u_1'$. Výsledný přenos napětí a vstupní odpor mohou být nyní počítány z veličin označených čárkami. Po dosazení a úpravě dostáváme

$$K_u = \frac{u_2'}{u_{vst}'} = \frac{AR_3}{R_1(1-A)+R_3} \quad \text{a} \quad R_{vst} = \frac{u_{vst}'}{i_1'} = R_1 + \frac{R_3}{1-A} \; .$$

Je-li např. dáno $R_1 = 5k\Omega$, $R_2 = 2k\Omega$, $R_3 = 100k\Omega$, $A = -4$ a $u_{vst} = 1\ V$, jsou napětí v obvodu $u_1 = 0{,}8\ V$, $u_2 = -3{,}2\ V$, přenos napětí $K = -3{,}2$ a vstupní odpor $R_{vst} = 25k\Omega$.

Příklad 3.13:

Na **Obr. 3.15** je schéma obvodu s ideálním operačním zesilovačem. Zajímá nás opět přenos napětí $K_u = u_5 / u_{vst}$.



Obr. 3.15: Způsob řešení obvodu s ideálním operačním zesilovačem

Protože do vstupních svorek operačního zesilovače neteče proud, vypočítáme napětí u_4 na rezistoru R_4 jednoduše jako výstupní napětí děliče tvořeného rezistory R_3 a R_4, tedy

$$u_4 = u_{vst} \frac{R_4}{R_3 + R_4} .$$

Vzhledem tomu, že i vstupní napětí ideálního operačního zesilovače je nulové, jsou napětí na rezistorech R_1 a R_3 stejně veliká a v důsledku toho platí

$$i_1 = i_3 \frac{R_3}{R_1} = \frac{u_{vst}}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_3}{R_1} .$$

Pro výstupní napětí u_5 pak dostáváme

$$u_5 = u_4 - R_2 . i_1 = u_{vst} \frac{R_4}{R_3 + R_4} - R_2 . \frac{u_{vst}}{R_3 + R_4} . \frac{R_3}{R_1} = u_{vst} \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 \left(R_3 + R_4 \right)}$$

a konečně pro přenos napětí

$$K_u = \frac{u_5}{u_{vst}} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 (R_3 + R_4)} .$$

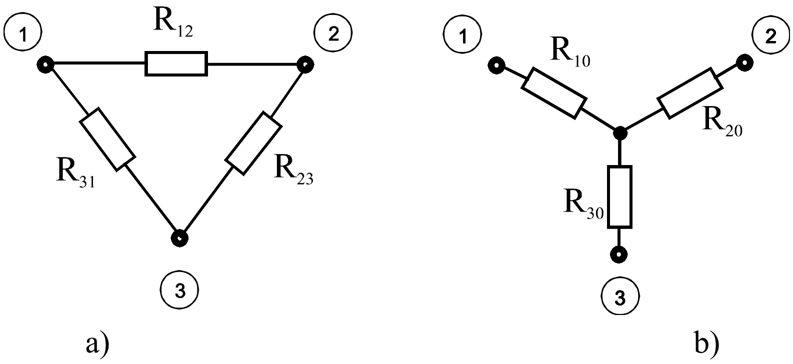
Pokud zvolíme odpor $R_4 = 0$, obdržíme výraz $K_u = -R_2 / R_1$ (výstupní napětí mění polaritu – jedná se o tzv. invertující zapojení IOZ, viz ***Příklad 2.2***). Rezistor R_3 pak může být vypojen.

Poznámka:

Ukazuje se, že ani metodou úměrných veličin nelze řešit příklad s rezistorovým můstkem na **Obr. 3.12**. Ať začneme s odhadem kteréhokoli proudu nebo napětí v obvodu, nemůžeme jednoduše postupovat po jednotlivých větvích obvodu až ke svorkám zdroje. Zvolíme-li např. proud rezistorem R_5, nemůžeme jednoduchým způsobem zjistit, jak se tento proud rozděluje na dva proudy v koncových uzlech tohoto rezistoru. Podobně to dopadne při jakékoli jiné volbě.

3.4.3 Transfigurace obvodu

V některých případech jednodušších obvodů může být užitečný postup, při kterém část obvodu nahradíme jiným zapojením, které se zvnějšku chová zcela stejně, ale je výhodnější z hlediska analýzy. Taková náhrada se nazývá jako **transfigurace obvodu**. Nejjednodušším případem je transfigurace zapojení do hvězdy na zapojení do trojúhelníku a naopak. Zapojení do trojúhelníku je na **Obr. 3.16a**, zapojení do hvězdy na **Obr. 3.16b**.



Obr. 3.16: Transfigurace obvodu

Oba obvody mají být ekvivalentní pokud jde o jejich chování vzhledem k vnějšímu okolí. To lze vysvětlit také tak, že pokud každý obvod uzavřeme do krabičky a necháme z ní vystupovat pouze tři vývody, žádným způsobem nejsme zvnějšku schopni obvody vzájemně rozlišit. Jediné, co se dá zvnějšku měřit, jsou vstupní odpory mezi jednotlivými vývody. Ekvivalence je tedy podmíněna splněním tří vztahů:

$$\frac{R_{12}(R_{23}+R_{31})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = R_{10}+R_{20}\ ,\ \frac{R_{23}(R_{31}+R_{12})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = R_{20}+R_{30}\ ,\ \frac{R_{31}(R_{12}+R_{23})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = R_{30}+R_{10}\ .$$

Jsou to rovnice lineární vzhledem k odporům hvězdy R_{10}, R_{20}, R_{30}. Snadno z nich proto tyto odpory vypočítáme, jsou-li zadány odpory trojúhelníku (transfigurace $\Delta \to \mathrm{Y}$):

$$R_{10} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\quad R_{20} = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\quad R_{30} = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}\ . \qquad (3.17)$$

Ve jmenovatelích všech tří zlomků je součet odporů trojúhelníku $\Sigma R = R_{12}+R_{23}+R_{31}$. Výpočet odporů trojúhelníku z odporů hvězdy již tak jednoduchý není, neboť se jedná o soustavu nelineárních rovnic (rovnice obsahují součiny hledaných odporů). Výsledkem řešení jsou vztahy (transfigurace $\mathrm{Y} \to \Delta$):

$$R_{12} = R_{10}+R_{20}+\frac{R_{10}R_{20}}{R_{30}}\ ,\ R_{23} = R_{20}+R_{30}+\frac{R_{20}R_{30}}{R_{10}}\ ,\ R_{31} = R_{30}+R_{10}+\frac{R_{30}R_{10}}{R_{20}}\ . \qquad (3.18)$$

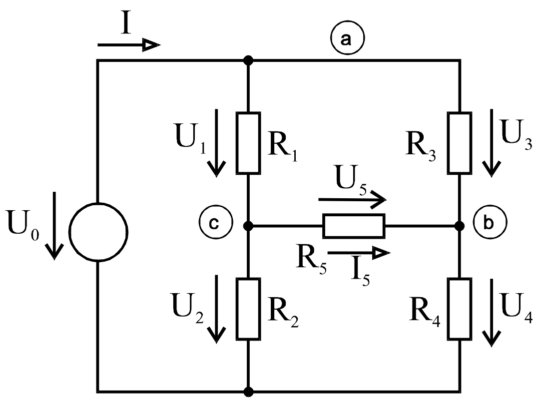
Je možné si také pamatovat, že pokud vyjádříme všechny hodnoty rezistorů jejich vodivostmi, obdržíme vztahy formálně podobné s (3.17), tedy

$$G_{12} = \frac{G_{10}G_{20}}{G_{10}+G_{20}+G_{30}},\quad G_{23} = \frac{G_{20}G_{30}}{G_{10}+G_{20}+G_{30}},\quad G_{31} = \frac{G_{30}G_{10}}{G_{10}+G_{20}+G_{30}}\ . \qquad (3.19)$$

Ukážeme nyní, jak lze pomocí transfigurace analyzovaný obvod přeměnit a umožnit tak jeho řešení některou z jednoduchých metod.

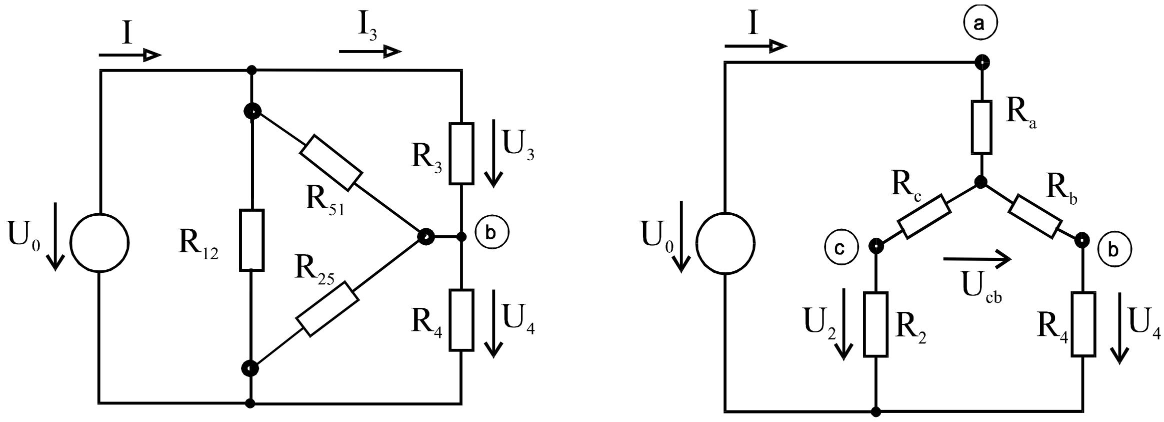
Příklad 3.14:

Vrátíme se k můstku z ***Příklad 3.10***, jehož schéma je nyní překresleno na **Obr. 3.17**. Opět se zajímáme o proud I_5 diagonálou můstku. Celkový proud I ze zdroje nemůžeme jednoduše zjistit, protože nedokážeme snadno vypočítat celkový odpor, který obvod pro napájecí zdroj představuje.



Obr. 3.17: Můstkové zapojení v metodě transfigurace

Rezistory R_1, R_2 a R_5 však můžeme pokládat za zapojené do hvězdy a nahradit je proto třemi jinými rezistory zapojenými do trojúhelníku, jak ukazuje **Obr. 3.18a**.



a) b)

Obr. 3.18: Různé způsoby transfigurace obvodu můstkového zapojení

Pak již snadno najdeme vstupní odpor obvodu $R_{vst} = R_{12} //((R_{51} // R_3) + (R_{25} // R_4))$ a určíme proud I. Jinou možností je náhrada trojúhelníku tvořeného rezistory R_1, R_3 a R_5 ekvivalentní hvězdou z rezistorů R_a, R_b, R_c, jak je nakresleno na **Obr. 3.18b**. Vstupní odpor je pak $R_{vst} = R_a + (R_c + R_2)//(R_b + R_4)$. Jakmile známe vstupní proud I, vypočítáme jednoduše všechny ostatní obvodové veličiny, jak bylo ukázáno u metody postupného zjednodušování obvodu v kap. 3.4.1.

Uvažujme konkrétní hodnoty odporů $R_1 = R_3 = 100\Omega$, $R_2 = 101\Omega$, $R_4 = 99\Omega$, $R_5 = 20\Omega$ a napájecí napětí můstku $U=10\ V$. Pak pro odpory ve schématu na **Obr. 3.18a** dostaneme $R_{12}=706\Omega$, $R_{25}=141{,}2\Omega$, $R_{51}=139{,}80198\Omega$ a vstupní proud bude $I=100{,}00458mA$. Problém je, že nám toto schéma neposkytne bezprostředně informaci o hledaném proudu rezistorem R_5, protože jeho levá svorka byla při transfiguraci hvězdy na trojúhelník redukována. Lépe se proto pro daný účel hodí transfigurace podle **Obr. 3.18b**, při které koncové uzly rezistoru R_5

zůstávají zachovány. Pro hodnoty rezistorů po transfiguraci dostaneme $R_a = 45{,}454545\ \Omega$, $R_b = R_c = 9{,}090909\ \Omega$. Proud ze zdroje je opět $I = 100{,}00458\ mA$. Pro napětí mezi uzly *c, b* máme $U_{cb} = 8{,}333715\ mV$ a hledaný proud diagonálou mostu $I_5 = U_{cb} / R_5 = 0{,}41668576\ mA$.

3.5 Univerzální metody analýzy

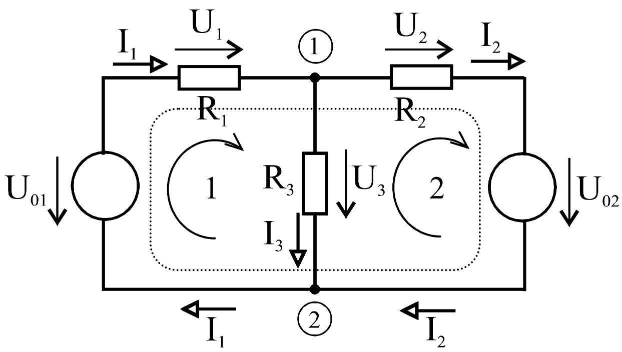
Univerzálními metodami rozumíme metody řešení elektrických obvodů, které dovolují analyzovat obvody libovolné složitosti. Jejich větší možnosti jsou však zaplaceny tím, že při řešení nevystačíme se základními početními operacemi, ale musíme řešit soustavu (lineárních) rovnic pro více neznámých veličin. V této kapitole uvedeme nejčastěji využívané metody a to

1. Metodu přímé aplikace Kirchhoffových zákonů
2. Metodu smyčkových proudů
3. Metodu uzlových napětí
4. Modifikovanou metodu uzlových napětí

3.5.1 Metoda přímé aplikace Kirchhoffových zákonů

Základem metody je sestavení výchozích rovnic na základě Kirchhoffových zákonů a vztahů mezi napětími a proudy na prvcích elektrického obvodu. Tyto rovnice mají řešení, pokud vytváří soustavu navzájem nezávislých rovnic. Použitím I. K. z. můžeme napsat počet rovnic, který je roven počtu uzlů v obvodu, pomocí II. K. z. pak počet rovnic rovný počtu možných smyček v obvodu. Takovýto postup by však vedl k soustavě závislých rovnic. Proto se rovnice formulují pouze pro tzv. **nezávislé uzly** a **nezávislé smyčky**. Obdržíme tak soustavu rovnic nezávislých, čímž je splněna podmínka pro jejich řešitelnost. Ukážeme to na následujícím příkladu.

Uvažujme obvod na **Obr. 3.19**. Obvod obsahuje tři rezistory a dva zdroje napětí. Cílem analýzy je určení všech neznámých, tj. tří proudů a tří napětí v obvodu.



Obr. 3.19: K metodě přímé aplikace Kirchhoffových zákonů

Skutečné smysly napětí a proudů zpravidla předem neznáme. Výchozí rovnice proto píšeme pro smysly zvolené. Pokud je výsledek řešení kladný, pak skutečný smysl je totožný se zvoleným. Záporný výsledek představuje případ, kdy skutečný smysl je opačný než zvolený.
Obvod má dva uzly, pro které lze formulovat rovnice dle I. Kirchhoffova zákona.

Rovnice pro uzel 1:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0\ , \tag{3.20}$$

rovnice pro uzel 2:

$$+I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad . \qquad (3.21)$$

Je zřejmé, že druhá rovnice nepřináší žádnou novou informaci, je lineárně závislá na první rovnici. Proto můžeme pro další výpočty použít pouze jedné z rovnic. Ukazuje se obecně, že pro obvod s celkovým počtem ***n*** **uzlů** můžeme formulovat pouze ***n-1*** **rovnici**. Je to dáno tím, že obvod jako celek tvoří uzavřenou soustavu, takže součet všech proudů v obvodu musí být roven nule. Závislým uzlem může být kterýkoliv uzel obvodu, zbylé uzly jsou pak nezávislé.

Další rovnice vycházejí z 2. Kirchhoffova zákona aplikovaného na nezávislé smyčky v obvodu. Stanovení nezávislých smyček je nejednoznačnou záležitostí. U jednoduchých obvodů můžeme použít pravidlo, že **nezávislé smyčky** jsou **oka obvodu**. Obecně platí, že počet ***s*** nezávislých smyček je dán počtem ***v*** všech větví obvodu, zmenšeného o počet ***n-1*** nezávislých uzlů, tj.

$$s = v - n + 1 \quad . \qquad (3.22)$$

V uvedeném obvodu jsou tři větve a jeden nezávislý uzel, tzn. jsou zde dvě nezávislé smyčky. Pokud je zvolíme jako oka (smyčky 1 a 2), dostáváme rovnice:

$$-U_{01} + U_1 + U_3 = 0 \quad , \qquad (3.23)$$

$$-U_3 + U_2 + U_{02} = 0 \quad . \qquad (3.24)$$

Pro třetí možnou smyčku (složenou) bychom dostali $-U_{01} + U_1 + U_2 + U_{02} = 0$. Tato rovnice je však opět lineárně závislá na prvních dvou a proto pro výpočet nepoužitelná.

Uvážíme-li dále Ohmův zákon, lze formulovat tři rovnice pro napětí na rezistorech

$$U_1 = R_1.I_1, \;\; U_2 = R_2.I_2, \;\; U_3 = R_3.I_3 \quad . \qquad (3.25)$$

Rovnice (3.25) můžeme dosadit do (3.23) a (3.24), čímž spolu s rovnicí např. (3.20) dostáváme soustavu tří rovnic pro všechny větvové proudy I_1, I_2 a I_1. Rovnice lze psát v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_{01} \\ -U_{02} \end{bmatrix} \quad . \qquad (3.26)$$

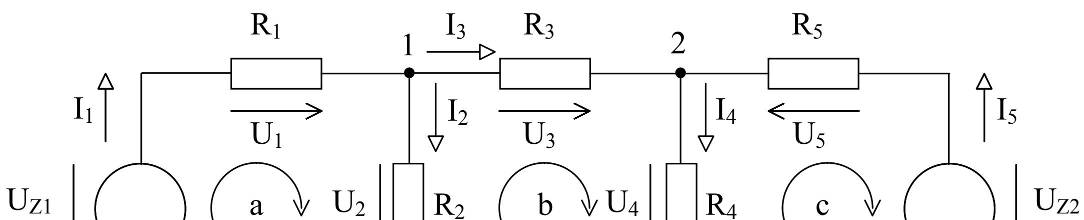
Podobně lze soustavu rovnic formulovat také pro napětí na všech prvcích v obvodu. V uvedeném příkladě tak, že se z rovnic (3.25) vyjádří proudy a dosadí např. do rovnice (3.20). Ta pak spolu s rovnicemi (3.23) a (3.24) tvoří soustavu tří rovnic pro tři napětí.

Analýza obvodů přímou aplikací Kirchhoffových zákonů je základní a nejobecnější metoda. Jejím výsledkem jsou proudy či napětí na všech prvcích obvodu.

Nevýhodou metody je skutečnost, že vede na příliš vysoký počet rovnic i pro poměrně jednoduché obvody, jak demonstruje ***Příklad 3.15*** .

Příklad 3.15:

Sestavte výchozí rovnice pro obvodu na **Obr. 3.20**.



Obr. 3.20: Řešení obvodu přímou aplikací Kirchhoffových zákonů

Výše popsanými postupy dojdeme k závěru, že obvod má tři nezávislé uzly a tři nezávislé smyčky. Jako závislý uzel je volen uzel č. 2. Nezávislými uzly jsou pak uzly 1, 2, 3 a nezávislými smyčkami jsou smyčky a, b, c (oka obvodu). Použitím Kirchhoffových zákonů obdržíme výchozí rovnice ve tvaru:

uzel 1 : $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$

uzel 2 : $-I_3 + I_4 - I_5 = 0$

uzel 3 : $-I_4 + I_5 + I_6 = 0$

smyčka a : $U_1 + U_2 - U_{z1} = 0$

smyčka b : $-U_2 + U_3 + U_4 + U_6 = 0$

smyčka c : $-U_4 - U_5 + U_{z2} = 0$

Dosadíme-li za napětí U_1 až U_6 z Ohmova zákona, dostáváme soustavu rovnic pro 6 větvových proudů. Zapsáno v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 & R_4 & 0 & R_6 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & -R_5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{z1} \\ 0 \\ -U_{z2} \end{bmatrix} .$$

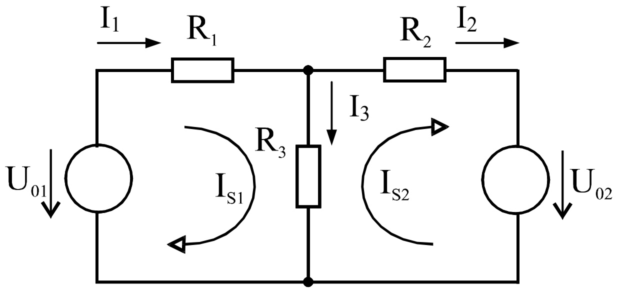
Jde sice o tzv. **řídké rovnice** (v matici je většina prvků rovna nule), ale jejich počet je příliš vysoký i u takto jednoduchého obvodu. Ruční řešení, např. výpočtem determinantů dle Cramerova pravidla, by bylo příliš obtížné a časově náročné.

Problém, jak počet nezávislých rovnic snížit, řeší metoda smyčkových proudů a metoda uzlových napětí. V obou případech probíhá analýza obvodu ve třech krocích:

1. Vybereme nejmenší možný počet vzájemně nezávislých obvodových veličin (smyčkových proudů resp. uzlových napětí).
2. Formulujeme a řešíme soustavu rovnic pro tyto nezávislé veličiny.
3. Z těchto veličin vypočítáme hodnoty všech zbývajících napětí a proudů v obvodu. Tento výpočet je již velmi jednoduchý a vystačí se základními početními operacemi.

3.5.2 Metoda smyčkových proudů (MSP)

Metoda smyčkových proudů vychází z představy, že jednotlivými **nezávislými smyčkami** obvodu protékají nezávislé proudy. Ve větvích, které jsou společné, teče pak proud daný superpozicí (součtem nebo rozdílem) příslušných smyčkových proudů. Postup ukážeme na témže obvodu jako u předešlé metody, viz **Obr. 3.21**.



Obr. 3.21: K metodě smyčkových proudů

V obvodu jsou, jak jsme již poznali, dvě nezávislé smyčky. Označíme smyčkové proudy I_{S1} a I_{S2} a jejich orientaci např. tak, jak to ukazuje **Obr. 3.21**. Rovnice dle 2. Kirchhoffova zákona píšeme tak, že sečítáme napětí ve směru daném orientací příslušného smyčkového proudu.

Pro první smyčku platí rovnice

$$-U_{01} + R_1 I_{S1} + R_3 \left(I_{S1} - I_{S2}\right) = 0 \quad , \tag{3.27}$$

pro druhou smyčku pak

$$R_3 \left(I_{S2} - I_{S1}\right) + R_2 I_{S2} + U_{02} = 0 \quad . \tag{3.28}$$

Úpravou dostáváme rovnice

$$(R_1 + R_3) I_{s1} - R_3 I_{s2} = U_{01} \quad , \tag{3.29}$$

$$-R_3 I_{s1} + (R_2 + R_3) I_{s2} = -U_{02} \quad , \tag{3.30}$$

které lze již snadno zapsat v maticovém tvaru jako

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{01} \\ -U_{02} \end{bmatrix} \quad . \tag{3.31}$$

Místo tří rovnic máme nyní pouze dvě a proto je jejich řešení velmi snadné i pomocí metody determinantů. Použitím Cramerova pravidla dostáváme pro smyčkové proudy

$$I_{s1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad \text{a} \quad I_{s2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad , \tag{3.32}$$

kde

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 . R_3 \tag{3.33}$$

je determinant soustavy a Δ_1, resp. Δ_2, je determinant matice vzniklé z matice soustavy záměnou prvního, resp. druhého, sloupce pravou stranou soustavy, tj.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} U_{01} & -R_3 \\ -U_{02} & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = U_{01}(R_2 + R_3) - U_{02} R_3 \quad , \tag{3.34}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & U_{01} \\ -R_3 & -U_{02} \end{vmatrix} = U_{01} R_3 - U_{02}(R_1 + R_3) \quad . \tag{3.35}$$

Pokud je soustava rovnic lineárně nezávislá, tzn. pokud byly smyčky obvodu voleny skutečně jako nezávislé, je determinant soustavy různý od nuly, $\Delta \neq 0$.

Proudy větvemi označené na **Obr. 3.21** pak budou dány superpozicí proudů smyčkových

$$I_1 = I_{s1}, \; I_2 = I_{s2}, \; I_3 = I_{s1} - I_{s2} \quad . \tag{3.36}$$

Rovnice pro smyčkové proudy lze psát obecně v maticovém tvaru

$$\mathbf{R I_s} = \mathbf{U_z} \quad , \tag{3.37}$$

kde **R** je matice soustavy (tzv. **odporová** matice obvodu),

$\mathbf{I_s}$ je vektor neznámých smyčkových proudů,

$\mathbf{U_z}$ je vektor pravých stran rovnic obsahující napětí nezávislých zdrojů.

Jak poznáme v navazujícím předmětu *Elektrotechnika 2*, obecněji se matice soustavy nazývá jako **impedanční matice** obvodu a značí se písmenem **Z**. Jejími prvky jsou pak vlastní a vzájemné impedance smyček obvodu.

Odporovou matici obvodu můžeme sestavit přímo na základě schématu a volby smyčkových proudů, aniž bychom rozepisovali rovnice podle 2. Kirchhoffova zákona:

1. Smyčkovým proudům přiřadíme indexy *1, 2, ..., s*.
2. Připravíme tabulky pro čtvercovou matici soustavy (bude mít *s* řádků a *s* sloupců), vektor neznámých proudů a vektor pravých stran. Do vektoru neznámých vepíšeme symboly smyčkových proudů $I_{s1}, I_{S2}, ..., I_{ss}$.
3. Sestavíme matici soustavy. Prvek R_{ii} na hlavní diagonále (tj. prvek v *i-tém* sloupci *i-tého* řádku) je roven součtu odporů v *i-té* smyčce. Je to tzv. **celkový vlastní odpor smyčky** a je vždy kladný. Prvek $R_{ij}=R_{ji}$ mimo hlavní diagonálu (prvek v *j-tém* sloupci *i-tého* řádku a stejně i prvek v *i-tém* sloupci *j-tého* řádku) jsou rovny součtu odporů, které jsou společné *i-té* a *j-té* smyčce (protékají jimi oba proudy současně). Jedná se o tzv. **vzájemný odpor smyček**. Znaménko je kladné, tekou-li oba proudy shodnými směry, záporné, tekou-li každý jiným směrem. Nemá-li daná dvojice smyček společnou větev, jsou příslušné prvky v matici nulové.
4. Sestavíme vektor pravých stran rovnic. Prvek U_{zi} v *i-tém* řádku je roven algebraickému součtu napětí nezávislých zdrojů, působících v *i-té* smyčce. Napětí se bere kladně, je-li orientováno proti směru proudu smyčky, záporně, je-li orientace shodná s orientací smyčkového proudu.

Poznámky:

1) Pokud jsou nezávislé smyčky voleny jako oka obvodu a současně mají smyčkové proudy stejnou orientaci, např. po směru hodinových ručiček, jsou všechny nenulové prvky mimo hlavní diagonálu opatřeny záporným znaménkem. V tomto případě je totiž ve společné větvi (existuje-li) směr smyčkových proudů vždy opačný.

2) Odporová matice je souměrná podle hlavní diagonály, pokud obvod obsahuje pouze nezávislé napěťové zdroje. Řízené napěťové zdroje způsobí nesymetrii odporové matice.

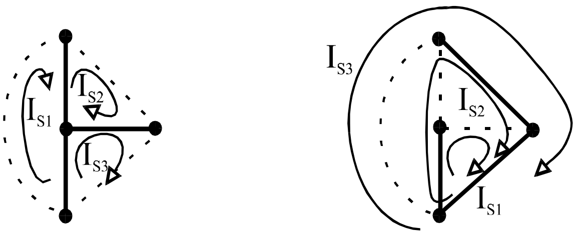
3) Pokud jsou v obvodu obsaženy proudové nezávislé zdroje, provádí se (je-li to možné) nejdříve jejich přepočet na ekvivalentní zdroje napěťové.

4) Základním problémem při aplikaci metody smyčkových proudů je volba nezávislých smyček. Jak bylo uvedeno v předešlé kapitole, jejich počet lze určit pomocí vztahu $s=v–n+1$, kde v je počet větví v obvodu a n je celkový počet uzlů (v příkladu, který jsme řešili, bylo $v=3$, $n=2$ a tedy $s=3-2+1=2$ nezávislé smyčky). Pro složitější obvody lze nezávislé smyčky volit nejlépe na základě tzv. **grafu obvodu**. Graf znázorňuje jednotlivé uzly jako body a propojení uzlů větvemi jako jejich spojnice. Příkladem může být např. graf můstku, jehož elektrické schéma je na **Obr. 3.12**. Graf je zobrazen na **Obr. 3.22a**.

a) b)

Obr. 3.22: Příklad grafu obvodu a jeho stromu

Pokud z grafu odebereme některé větve tak, aby zbylé větve stále vzájemně propojovaly všechny uzly obvodu, ale nikde netvořily uzavřené smyčky, dostáváme tzv. **strom**. Jednu možnou volbu stromu ukazuje **Obr. 3.22b**. Plnými čarami jsou nakresleny větve stromu (**haluze**), čárkovaně pak větve odebrané (**hlavní větve, tětivy**). Hlavními větvemi jsou určeny nezávislé smyčky. Každou hlavní větví protéká právě jeden nezávislý smyčkový proud. Na **Obr. 3.23a** jsou zvoleny smyčkové proudy příslušné hlavním větvím na **Obr. 3.22b**.



a) b)

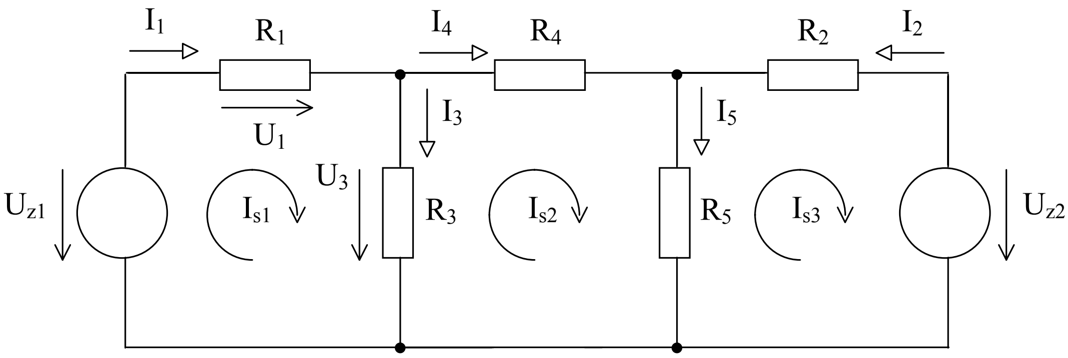
Obr. 3.23: Příklady volby stromu a smyčkových proudů

Všechny jsou orientovány shodně, ve směru hodinových ruček. I když je to nejčastější způsob, není zdaleka jediný možný; každý z proudů by mohl být orientován obráceně. Protože jsou smyčky příslušné takovému stromu oka obvodu, větvemi pak protékají smyčkové proudy vždy opačného směru. Jak již bylo poznamenáno, tato skutečnost vede ke zjednodušení při sestavování odporové matice soustavy. Na **Obr. 3.23b** je uveden příklad jiné možné volby stromu a smyčkových proudů u stejného obvodu. V tomto případě jsou již dvě smyčky složené a směry smyčkových proudů ve větvích obvodu je třeba vždy vyšetřit jednotlivě.

Závěrem lze o metodě smyčkových proudů říci, že je vhodná pro ruční řešení jednodušších obvodů a to zvláště obvodů obsahujících magneticky vázané cívky (obvody s transformátory, elektrickými točivými stroji apod.). Naprosto se nehodí pro řešení složitějších elektronických obvodů s tranzistory nebo integrovanými obvody. Protože volba nezávislých smyček dává příliš mnoho možností, je metoda smyčkových proudů obtížně použitelná k realizaci programů pro analýzu obvodů počítačem.

Příklad 3.16:

Proveďte výpočet všech větvových proudů I_1 až I_5 v obvodu dle **Obr. 3.24**.



Obr. 3.24: Příklad aplikace metody smyčkových proudů

Obvod má 5 větví a 2 nezávislé uzly, tedy 5 – 2 = 3 nezávislé smyčky, které jsou voleny jako jednoduché. Všechny tři smyčkové proudy jsou orientovány shodně.
Podle výše popsaných pravidel můžeme sestavit soustavu rovnic přímo v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_2 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{z1} \\ 0 \\ -U_{z2} \end{bmatrix}.$$

Po výpočtu smyčkových proudů některou ze známých metod (Cramerovým pravidlem, pomocí inverzní matice, Gaussovou eliminací, …) můžeme psát rovnice pro proudy větvové jako superpozice proudů smyčkových:

$$I_1 = I_{s1},\ I_2 = -I_{s3},\ I_3 = I_{s1} - I_{s2},\ I_4 = I_{s2} \text{ a } I_5 = I_{s2} - I_{s3}.$$

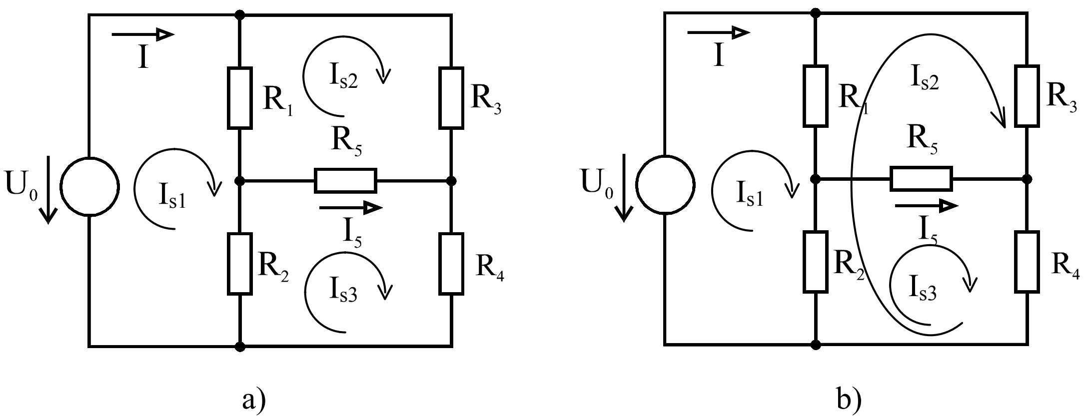
Např. při užití Cramerova pravidla musíme vypočítat čtyři determinanty třetího řádu. Máme-li ovšem k dispozici prostředek k rychlému výpočtu inverzní matice, dostaneme vektor všech smyčkových proudů v jednom výpočetním kroku jako

$$\mathbf{I_s} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U_z}\ , \qquad (3.38)$$

kde jsme označili $\mathbf{R}^{-1}$ matici inverzní k odporové matici soustavy $\mathbf{R}$.

Příklad 3.17:

Uvažujme můstkové zapojení podle ***Příklad 3.14***, které bylo řešeno metodou transfigurace. Hodnoty prvků obvod: $R_1 = R_3 = 100\Omega$, $R_2 = 101\Omega$, $R_4 = 99\Omega$, $R_5 = 20\Omega$, U=$10V$. Zajímáme se o proud I_5 diagonálou můstku.



Obr. 3.25: Můstkové zapojení v metodě smyčkových proudů

Obvod má 6 větví a 3 nezávislé uzly, tj. má 6 – 3 = 3 nezávislé smyčky, jak je znázorněno v grafu obvodu na **Obr. 3.22**. Volíme-li je nejdříve jako jednoduché podle **Obr. 3.25a**, dostáváme maticovou rovnici

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_1 & -R_2 \\ -R_1 & R_1+R_3+R_5 & -R_5 \\ -R_2 & -R_5 & R_2+R_4+R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Protože proud diagonálou je roven $I_5 = I_{s3} - I_{s2}$, je třeba počítat dva smyčkové proudy, např. při užití Cramerova pravidla 3 determinanty třetího řádu. Uvedené volbě systému nezávislých smyček odpovídá strom podle **Obr. 3.23a**.

Při **částečné analýze** obvodu může být výhodné přizpůsobit volbu nezávislých smyček danému účelu analýzy. Hledáme-li tedy pouze proud diagonálou můstku I_5, je výhodnější zvolit např. jednu smyčku jako složenou, viz **Obr. 3.25b**. V tomto případě bude proud diagonálou roven přímo jednomu smyčkovému proudů, $I_5 = I_{s3}$, neboť tato diagonála se stává hlavní větví obvodu. Odpovídající maticová rovnice má tvar

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_1-R_2 & -R_2 \\ -R_1-R_2 & R_1+R_2+R_3+R_4 & R_2+R_4 \\ -R_2 & R_2+R_4 & R_2+R_4+R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pozor na znaménko u vzájemného odporu smyček 2 a 3 – oba smyčkové proudy zde mají stejný směr, proto je znaménko kladné. Po dosazení numerických hodnot dostáváme

$$\begin{bmatrix} 201 & -201 & -101 \\ -201 & 400 & 200 \\ -101 & 200 & 220 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

užitím Cramerova pravidla pak

$$I_5 = I_{s3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2000}{4799780} = 0.41668576 mA,$$

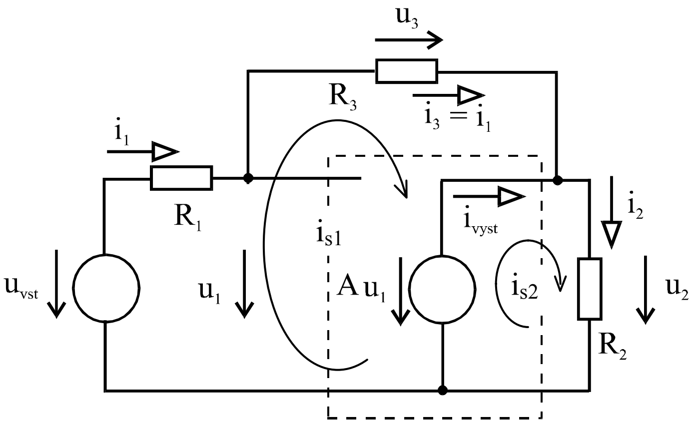
což je stejný výsledek jako v ***Příklad 3.14***.

Další varianta volby systému nezávislých smyček tak, aby diagonála můstku byla hlavní větví, je ukázána např. na stromu podle **Obr. 3.23b** (zde jsou složené smyčky dvě).

V následujícím příkladu ukážeme, jak se dá metoda smyčkových proudů použít pro řešení obvodu, který obsahuje řízený napěťový zdroj. Uvidíme, že v tomto případě nelze použít výše uvedených pravidel pro přímé sestavení maticové rovnice, a že odporová matice soustavy nebude symetrická.

Příklad 3.18:

Na **Obr. 3.26** je obvod se zdrojem napětí řízeným napětím (zesilovač napětí), který byl již řešen metodou úměrných veličin, viz ***Příklad 3.12***. Opět se zajímáme o výsledný vstupní odpor $R_{vst} = u_{vst}/i_1$ a celkové zesílení $K_u = u_2/u_{vst}$.



Obr. 3.26: Obvod s řízeným zdrojem napětí v MSP
V obvodu máme dvě nezávislé smyčky, které můžeme volit jako jednoduché.

Pro smyčku 1 platí dle II. K. z.:

$$(R_1 + R_3)i_{s1} + Au_1 - u_{vst} = 0 \quad .$$

Pro smyčku 2 pak platí

$$-Au_1 + R_2 i_{s2} = 0 \quad .$$

Dosadíme-li nyní do obou rovnic za napětí $u_1 = u_{vst} - R_1 i_{s1}$, dostáváme po úpravě

$$[(1-A)R_1 + R_3]i_{s1} = (1-A)u_{vst} \quad ,$$

$$AR_1 i_{s1} + R_2 i_{s2} = Au_{vst} \quad .$$

Vidíme, že z první rovnice můžeme vypočítat smyčkový proud i_{s1}, který je roven vstupnímu proudu i_1. Dostáváme

$$i_1 = \frac{1-A}{(1-A)R_1 + R_3} u_{vst} \quad ,$$

a pro vstupní odpor platí

$$R_{vst} = \frac{u_{vst}}{i_1} = R_1 + \frac{R_3}{1-A} \quad .$$

Po dosazení i_{s1} dostaneme ze druhé rovnice smyčkový proud i_{s2}, který je roven výstupnímu proudu i_2. Ihned pak spočítáme výstupní napětí $u_2 = R_2 i_2$. Dostáváme

$$i_2 = \frac{AR_3}{R_2[(1-A)R_1 + R_3]} u_{vst} \quad , \qquad u_2 = \frac{AR_3}{(1-A)R_1 + R_3} u_{vst} \quad ,$$

a konečně napěťový přenos

$$K_u = \frac{u_2}{u_{vst}} = \frac{AR_3}{(1-A)R_1 + R_3} \quad .$$

Obdrželi jsme stejné výsledky jako v ***Příklad 3.12***.

V maticovém zápisu má soustava rovnic tvar

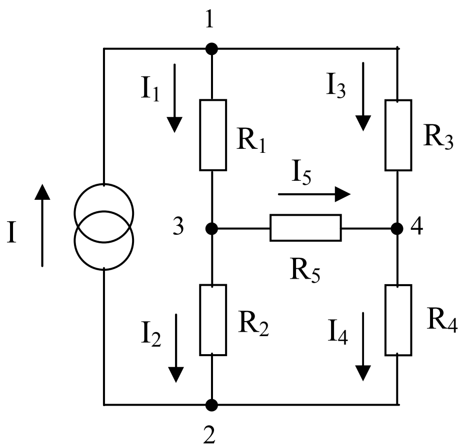
$$\begin{bmatrix} (1-A)R_1 + R_3 & 0 \\ AR_1 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-A)u_{vst} \\ Au_{vst} \end{bmatrix} \quad .$$

Vidíme, že odporová matice není symetrická a že napěťové zesílení A (řídicí parametr ZNŘN) se objevuje i ve vektoru na pravé straně rovnice. Užitím Cramerova pravidla bychom opět snadno odvodili vztahy pro smyčkové proudy i_{s1} a i_{s2}.

Nakonec ukážeme, jak je možné metodou smyčkových proudů vyřešit obvod, ve kterém se vyskytuje ideální zdroj proudu bez paralelně zapojeného rezistoru, tj. kdy nelze provést přepočet na ekvivalentní napěťový zdroj.

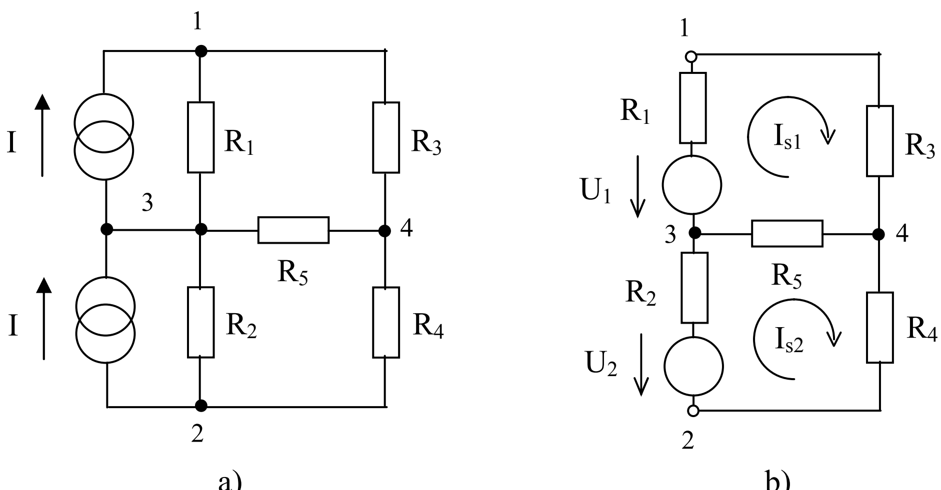
Příklad 3.19:

Uvažujme můstkové zapojení napájené ze zdroje proudu I podle **Obr. 3.27**. Zajímají nás proudy všemi rezistory I_1 až I_3. Pro řešení máme použít metodu smyčkových proudů.



Obr. 3.27: Můstkové zapojení napájené ze zdroje proudu

V obvodu nelze provést přepočet zdroje proudu na ekvivalentní zdroj napěťový, neboť k ideálnímu proudovému zdroji není připojen paralelně žádný rezistor. Postup, kterého lze při řešení použít, je metoda **přemístění ideálního proudového zdroje**. Proudový zdroj se vyjme z obvodu a zapojí se způsobem, jak je znázorněno na **Obr. 3.28a**.



Obr. 3.28: Metoda přemístění proudového zdroje

Cesta proudu nyní vede přemístěnými zdroji. Jak je z **Obr. 3.28a** zřejmé, do uzlu 1 vtéká proud I téže velikosti jako v původním zapojení podle **Obr. 3.27**, z uzlu 2 naopak stejný proud I vytéká. Proudové poměry se nezměnily ani v přilehlých uzlech: do uzlu 3 totiž proud I vtéká, ovšem současně z něho stejný proud I vytéká. Dostali jsme ale zapojení, ve kterém je již ke každému ideálnímu proudovému zdroji připojen paralelně rezistor. Můžeme proto provést jejich náhradu ekvivalentními zdroji napěťovými, jak ukazuje **Obr. 3.28b**. Jejich vnitřní napětí jsou rovny $U_1 = IR_1$ a $U_2 = IR_2$, vnitřní odpory R_1 a R_2, viz kap. 3.2.

Pro dvě jednoduché smyčky pak dostáváme maticovou rovnici

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_5 & -R_5 \\ -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} .$$

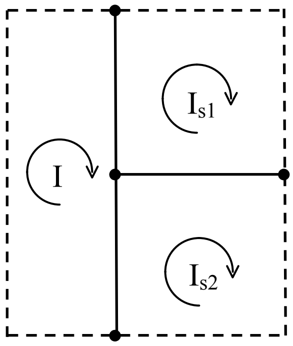
Po vyřešení smyčkových proudů můžeme pro proudy větvové psát:

$$I_3 = I_{s1},\ I_4 = I_{s2},\ I_5 = I_{s2} - I_{s1},\ I_1 = I - I_3,\ I_2 = I - I_4 .$$

Pozor!

Rezistory R_1 a R_2 na **Obr. 3.28b** nejsou totožné s rezistory R_1 a R_2 na **Obr. 3.27** a **Obr. 3.28a**, mají pouze stejné hodnoty odporů. Jednou totiž představují vnitřní odpory napěťových zdrojů, podruhé vnitřní odpory zdrojů proudových. Je proto třeba dát pozor při výpočtu proudů I_1 a I_2, které jsou vyznačeny na **Obr. 3.27**.

Můžeme ovšem postupovat i následujícím způsobem. Ve větvi, která obsahuje ideální zdroj proudu, je proud již známou veličinou. Tato větev proto musí být považována vždy za nezávislou (hlavní větev). Označíme-li v původním zapojení na **Obr. 3.27** tři nezávislé smyčky, např. jako oka podle grafu obvodu na **Obr. 3.29**, můžeme sestavit rovnice dle II. K. z. pro ty smyčky, v jejichž hlavních větvích se nevyskytuje ideální proudový zdroj, tj. pro smyčky s proudy I_{s1} a I_{s2}. Proud I je považován také za proud smyčkový, ovšem známé velikosti (a objeví se na pravé straně soustavy rovnic).



Obr. 3.29: Graf obvodu můstkového zapojení dle **Obr. 3.27**

Můžeme psát

– pro smyčku 1

$$(I_{s1}-I)R_1+I_{s1}R_3+(I_{s1}-I_{s2})R_5=0 \quad ,$$

– pro smyčku 2

$$(I_{s2}-I)R_2+(I_{s2}-I_{s1})R_5+I_{s2}R_4=0 \quad .$$

Po úpravě dostáváme soustavu rovnic v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_5 & -R_5 \\ -R_5 & R_2+R_4+R_5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} IR_1 \\ IR_2 \end{bmatrix} \quad .$$

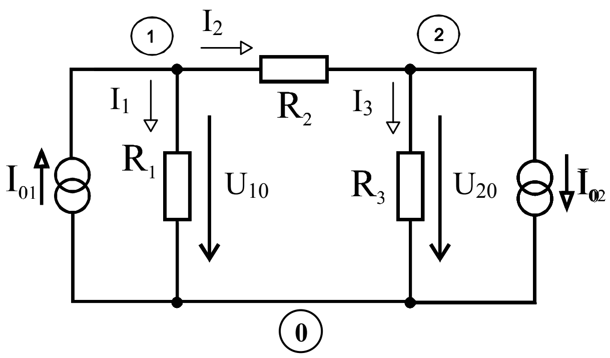
Obdrželi jsme stejný výsledek jako při užití metody přemístění ideálního proudového zdroje, neboť vnitřní napětí náhradních napěťových zdrojů jsou rovny $U_1=IR_1$ a $U_2=IR_2$.

3.5.3 Metoda uzlových napětí (MUN)

Řešení obvodu na základě metody uzlových napětí probíhá opět ve třech krocích:

1. Vybereme jeden z uzlů obvodu a prohlásíme jej za tzv. **referenční uzel**, zpravidla se mu přiřazuje pořadové číslo 0. Jeho potenciál pokládáme za rovný nule. Očíslujeme ostatní, tzv. **nezávislé uzly**, a označíme v kladném smyslu jejich napětí vzhledem k referenčnímu uzlu (tzv. **uzlová napětí**) jako U_{10}, U_{20}, ... $U_{(n-1)0}$.
2. Pro jednotlivé **nezávislé uzly** formulujeme rovnice podle 1. Kirchhoffova zákona. Proudy tekoucí z uzlu bereme s kladným znaménkem, proudy tekoucí do uzlu se záporným znaménkem. Řešením soustavy rovnic obdržíme velikosti uzlových napětí v obvodu.
3. Vypočítáme proudy a napětí na jednotlivých prvcích obvodu.

Metoda uzlových napětí vyžaduje, aby zdroje v obvodu (nezávislé i řízené) byly **výhradně zdroje proudu**. Případné zdroje napětí nahradíme (pokud je to možné) ekvivalentními zdroji proudu. Postup vysvětlíme na příkladu podle **Obr. 3.30**.



Obr. 3.30: K metodě uzlových napětí

Obvod má celkem tři uzly. Uzel na spodním okraji schématu označíme jako referenční (pořadové číslo nula), nezávislým uzlům přidělíme pořadová čísla 1 a 2. Uzlová napětí označíme jako U_{10} a U_{20}. Rovnice podle 1. Kirchhoffova zákona pro uzel 1 pak zní

$$\frac{1}{R_1}U_{10} + \frac{1}{R_2}\left(U_{10} - U_{20}\right) - I_{01} = 0 \quad , \tag{3.39}$$

rovnice 2. uzlu

$$\frac{1}{R_2}\left(U_{20} - U_{10}\right) + \frac{1}{R_3}U_{20} + I_{02} = 0 \quad . \tag{3.40}$$

Použijeme-li místo převrácených hodnot odporů vodivosti, dostáváme po úpravě rovnice

$$(G_1 + G_2)U_{10} - G_2U_{20} = I_{01} \quad , \tag{3.41}$$

$$-G_2U_{10} + (G_2 + G_3)U_{20} = -I_{02} \quad , \tag{3.42}$$

které lze již snadno zapsat v maticovém tvaru jako

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{01} \\ -I_{02} \end{bmatrix} \quad . \tag{3.43}$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme uzlová napětí

$$U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{I_{01}\left(G_2 + G_3\right) - I_{02}G_2}{G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_1} \quad , \tag{3.44}$$

$$U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{I_{01}G_2 - I_{02}\left(G_1 + G_2\right)}{G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_1} \quad . \tag{3.45}$$

V těchto vztazích je opět Δ determinant matice soustavy, Δ_1 a Δ_2 jsou determinanty matice vytvořené z matice soustavy, a to Δ_1 po záměně prvního a Δ_2 po záměně druhého sloupce matice za sloupec vektoru pravých stran.

Nyní můžeme vypočítat **větvové napětí**

$$U_{12} = U_{10} - U_{20} \tag{3.46}$$

a proudy jednotlivými rezistory

$$I_1 = \frac{U_{10}}{R_1} = U_{10}G_1, \quad I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = U_{12}G_2, \quad I_3 = \frac{U_{20}}{R_3} = U_{20}G_3 \quad . \tag{3.47}$$

Obecně můžeme psát

$$\mathbf{GU} = \mathbf{I_z} \quad , \tag{3.48}$$

kde $\mathbf{G}$ je matice soustavy (tzv. **vodivostní** matice obvodu),
$\mathbf{U}$ je vektor neznámých uzlových napětí,
$\mathbf{I_z}$ je vektor pravých stran (nezávislých zdrojů proudu).

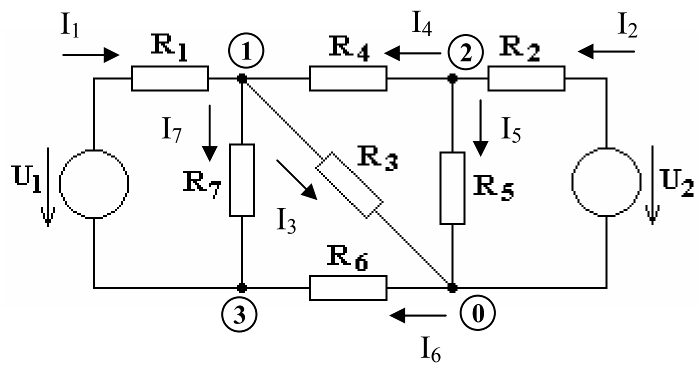
Jak poznáme v navazujícím předmětu *Elektrotechnika 2*, obecněji se matice soustavy nazývá jako **admitanční matice** obvodu a značí se písmenem **Y**. Jejími prvky jsou pak vlastní a vzájemné admitance uzlů obvodu.

Při praktickém použití metody uzlových napětí rovnice formulujeme na základě schématu obvodu přímo v maticové formě:

1. Připravíme čtvercovou vodivostní matici, jejíž řád je roven počtu neznámých uzlových napětí, tj. počtu uzlů v obvodu zmenšenému o jedničku. Do sloupcové matice vektoru neznámých ihned napíšeme symboly uzlových napětí.
2. Vodivostní matici sestavujeme tak, že nejprve píšeme prvky na hlavní diagonále. Prvek G_{ii} (tj. prvek v *i-tém* sloupci *i-tého* řádku) je roven součtu vodivostí připojených k *i*-tému uzlu. Je to tzv. **celková vlastní vodivost uzlu** a prvek je vždy kladný. Prvky mimo hlavní diagonálu $G_{ij} = G_{ji}$ jsou tzv. **vzájemné vodivosti uzlů**, tedy součty vodivostí větví zapojených mezi uzly *i* a *j*. Pokud se čítací šipky všech uzlových napětí volí stejným směrem, zpravidla směrem k uzlu referenčnímu, jsou tyto prvky opatřeny záporným znaménkem. Vzájemná vodivost dvou uzlů je nulová, nejsou-li tyto uzly přímo spojeny žádnou jednoduchou větví. Vodivostní matice je souměrná podle hlavní diagonály, pokud obvod obsahuje pouze nezávislé proudové zdroje. Řízené proudové zdroje způsobí nesymetrii vodivostní matice.
3. Prvek I_{zi} v *i*–tém řádku vektoru pravých stran je roven algebraickému součtu proudů nezávislých zdrojů, které tekou do uzlu *i*. Pozor! Proudy, které z uzlu vytékají, se zde píší se záporným znaménkem. Zdroje proudu totiž změní převodem na druhou stranu rovnic znaménko – viz vztahy (3.39), (3.40) a (3.41), (3.42).

Příklad 3.20:

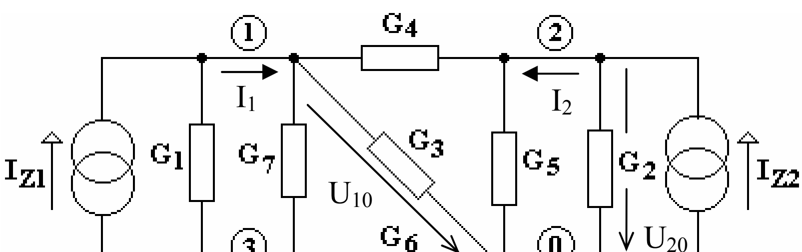
Určete všechny proudy v obvodu podle **Obr. 3.31**, jsou-li zadány hodnoty prvků obvodu: U_1 = 5V, U_2 = 10V, R_1 = 2kΩ, R_2 = 3kΩ, R_3 = 5kΩ, R_4 = 2kΩ, R_5 = 1kΩ, R_6 = 4kΩ a R_7 = 10kΩ. K výpočtu použijte metody uzlových napětí.



Obr. 3.31: Příklad aplikace metody uzlových napětí

V obvodu je 7 větví a 3 nezávislé uzly, tj. 7 – 3 = 4 nezávislé smyčky. Vidíme, že dříve diskutovaná metoda smyčkových proudů by vyžadovala vyřešit soustavu čtyř nezávislých rovnic, zatímco metoda uzlových napětí pouze rovnic tří. Jako referenční uzel byl zvolen uzel vpravo dole (označen 0), tři zbylé nezávislé uzly jsou značeny 1, 2 a 3.

K oběma ideálním nezávislým zdrojům napětí jsou připojeny do série rezistory, které budeme považovat za vnitřní odpory napěťových zdrojů. Nejdříve provedeme jejich náhradu zdroji proudovými, s vnitřními proudy $I_{z1} = U_1/R_1$, $I_{z2} = U_2/R_2$ a vnitřními vodivostmi $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$, viz kap. 3.2. Dále překreslíme původní zapojení (ve kterém již budeme užívat vodivostí namísto odporů) a vyznačíme příslušná uzlová napětí, viz **Obr. 3.32**.



Obr. 3.32: Náhradní model obvodu s proudovými zdroji

Rovnice MUN v maticovém tvaru pak bude

$$\begin{pmatrix} G_1+G_3+G_4+G_7 & -G_4 & -(G_1+G_7) \\ -G_4 & G_2+G_4+G_5 & 0 \\ -(G_1+G_7) & 0 & G_1+G_6+G_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Z1} \\ I_{Z2} \\ -I_{Z1} \end{pmatrix} .$$

Po dosazení numerických hodnot a výpočtu dostáváme pro uzlová napětí

$$U_{10} = 2{,}222\,V\,,\; U_{20} = 2{,}424\,V\,,\; U_{30} = -1{,}373\,V\;.$$

Pro proudy jednotlivými rezistory pak můžeme psát

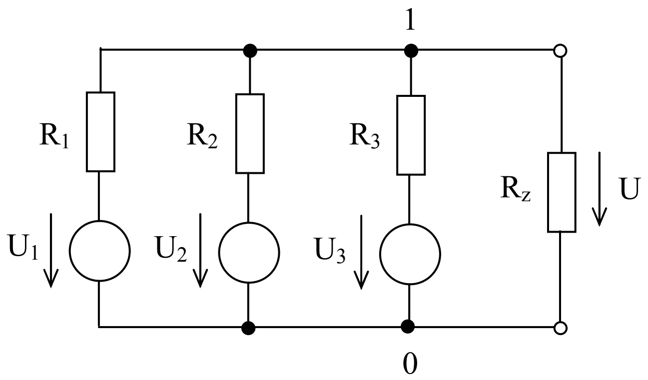
$$I_1 = (U_1 - U_{13})/R_1 = I_{Z1} - G_1U_{13} = I_{Z1} - G_1(U_{10} - U_{30}) = 0{,}7025\,mA\,,$$
$$I_2 = (U_2 - U_{20})/R_2 = I_{Z2} - G_2U_{20} = 2{,}525\,mA\,,$$
$$I_3 = G_3U_{10} = 0{,}4444\,mA\,,$$
$$I_4 = G_4U_{21} = G_2(U_{20} - U_{10}) = 0{,}101\,mA\,,$$
$$I_5 = G_6U_{20} = 2{,}424\,mA\,,$$
$$I_6 = G_6U_{03} = -G_6U_{30} = 0{,}3433\,mA\,,$$
$$I_7 = G_7U_{13} = G_7(U_{10} - U_{30}) = 0{,}3595\,mA\,.$$

Poznámka:

Opět je zde třeba dát pozor: proudy I_1 a I_2 nejsou proudy rezistory s vodivostmi G_1 a G_2 ve schématu na **Obr. 3.32**, ale proudy rezistory s odpory R_1 a R_2 v původním schématu na **Obr. 3.31**. V náhradním obvodu podle **Obr. 3.32** jsou to proudy vytékající ze svorek modelů ekvivalentních proudových zdrojů, jak je v tomto schématu vyznačeno.

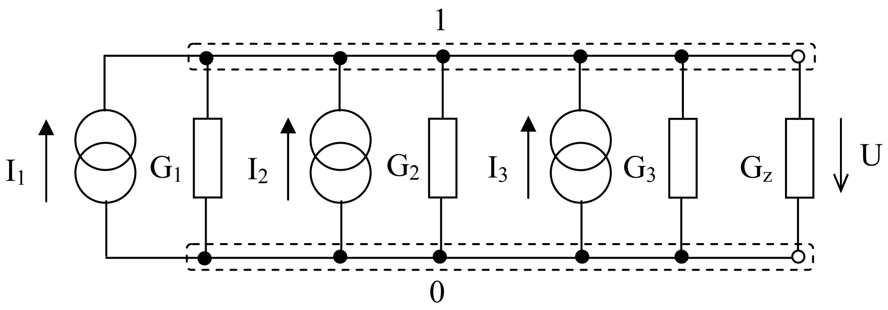
Příklad 3.21:

Vypočítejte výstupní napětí U na zátěži napájené třemi paralelně řazenými napěťovými zdroji podle **Obr. 3.33**.



Obr. 3.33: Paralelně řazené napěťové zdroje

Obvod má pouze dva uzly, tedy jeden uzel nezávislý (označen 1). Užití metody uzlových napětí proto povede na řešení jediné rovnice. Na **Obr. 3.34** je uveden odpovídající model s proudovými zdroji a vodivostmi.



Obr. 3.34: Náhradní model s proudovými zdroji

Pro uzel 1 dostáváme jednoduchou rovnici

$$(G_1 + G_2 + G_3 + G_z)U = I_1 + I_2 + I_3 \quad . \tag{3.49}$$

Uvážíme-li, že $I_i = U_i / R_i = U_i G_i$, $i = 1,2,3$, dostáváme z (3.49) pro napětí

$$U = \frac{U_1 G_1 + U_2 G_2 + U_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_z} \quad . \tag{3.50}$$

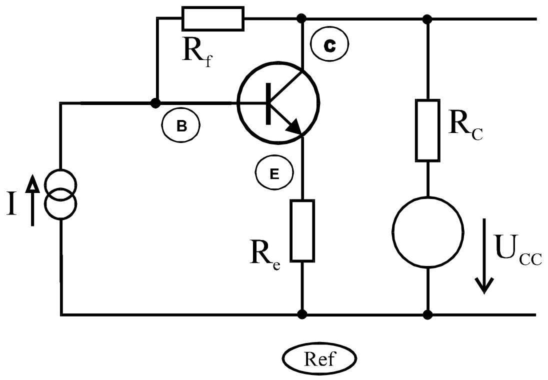
Poslední rovnici lze zobecnit pro libovolný počet N paralelně řazených napěťových zdrojů. Platí vzorec

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{N} U_i G_i}{G_z + \sum_{i=1}^{N} G_i} \quad . \tag{3.51}$$

K témuž výsledku lze dospět také aplikací tzv. Millmanovy věty, o které bude pojednáno v kap. 3.6.6. Jak uvidíme v předmětu *Elektrotechnika 2*, právě vztah (3.50), zapsán ovšem s admitancemi namísto s vodivostmi, lze s výhodou použít např. při řešení trojfázových obvodů. Je proto užitečné si tento výsledek pamatovat.

V další části se budeme zabývat případem, kdy **obvod obsahuje řízený zdroj proudu**. Uvidíme, že důsledkem je porušení symetrie vodivostní (admitanční) matice. Dále ukážeme, jak lze i v takovémto případě sestavit vodivostní matici přímo ze zadaného schématu.

Na **Obr. 3.35** je nakresleno schéma jednoduchého tranzistorového zesilovacího stupně se zpětnou vazbou. Bipolární tranzistor NPN má tři elektrody – bázi, kolektor a emitor. Signál ze zdroje proudu I je přiveden na bázi, zesílený signál je odváděn z kolektoru. Pro správnou činnost je nutno tranzistoru nastavit vhodný pracovní bod. To zajišťuje zvláštní zdroj stejnosměrného napětí U_{CC},. (Napětí tohoto zdroje bývá několik voltů).

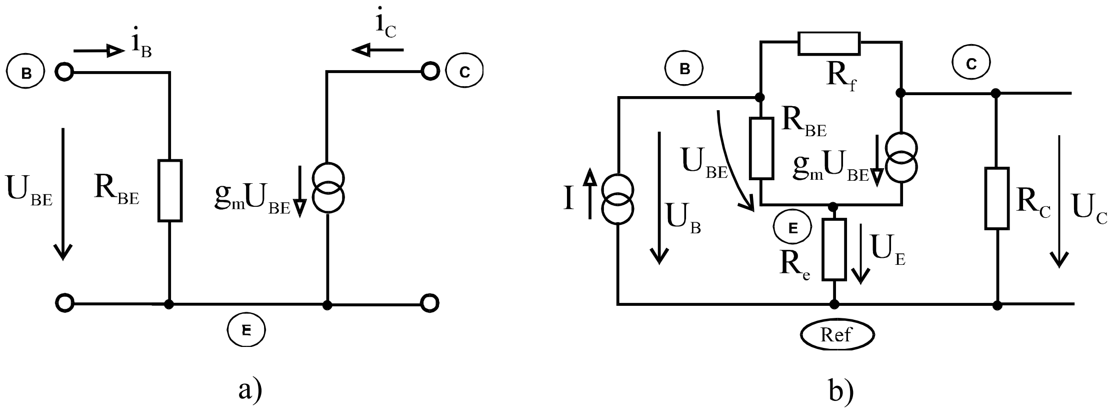


Obr. 3.35: Tranzistorový zesilovací stupeň se zpětnou vazbou

Předpokládáme, že zesilovač zpracovává velmi malý signál, řádově několik milivoltů nebo desítek milivoltů. V tom případě můžeme provést tzv. linearizaci charakteristik tranzistoru a zaměnit ho pro účely analýzy obvodu náhradním zapojením. Často stačí použít jednoduché náhradní schéma, které je nakresleno na **Obr. 3.36a**. Schéma má tři uzly stejně jako tranzistor. Mezi bází a emitorem je zapojen rezistor R_{BE}. Proud báze je roven podílu napětí U_{BE} mezi bází a emitorem a odporu R_{BE}. Proud kolektoru je pak roven proudu báze násobenému proudovým zesilovacím činitelem β, tj.

$$I_C = \beta I_B = \frac{\beta}{R_{BE}} U_{BE} = g_m U_{BE} \quad . \tag{3.52}$$

To je ve schématu respektováno zdrojem proudu řízeným napětím. Parametr tohoto řízeného zdroje $g_m = \beta / R_{BE}$ je strmost tranzistoru.



Obr. 3.36: Náhradní schémata tranzistoru a zesilovacího stupně

Upravené schéma obvodu, které budeme řešit, je na **Obr. 3.36b**. Tranzistor je nahrazen popsaným náhradním schématem. Místo zdroje stejnosměrného napájecího napětí je ve schématu zkrat, protože napětí U_{cc} má vliv pouze na polohu pracovního bodu tranzistoru (a tím na velikosti parametrů R_{BE} a g_m), ale jinak neovlivňuje průchod zesilovaného signálu obvodem.

Protože zatím nevíme, jak sestavit vodivostní matici, vyjdeme z rovnic podle 1. Kirchhoffova zákona.

uzel B:

$$G_{BE}(U_B - U_E) + G_f(U_B - U_C) = I \tag{3.53}$$

uzel C:

$$G_f(U_C - U_B) + g_m(U_B - U_E) + G_c U_C = 0 \tag{3.54}$$

uzel E:

$$G_{BE}(U_E - U_B) - g_m(U_B - U_E) + G_e U_E = 0 \tag{3.55}$$

Z rovnic zapsaných v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} G_{BE} + G_f & -G_f & -G_{BE} \\ -G_f + g_m & G_f + G_C & -g_m \\ -G_{BE} - g_m & 0 & G_{BE} + G_e + g_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \\ U_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

je vidět několik zajímavých skutečností:

1. Parametr g_m řízeného zdroje se objeví ve vodivostní matici, a ne na pravých stranách. Na pravých stranách jsou vždy jen proudy nezávislých zdrojů.
2. Vodivostní matice není souměrná podle hlavní diagonály. Jak poznáme později, znamená to, že obvod není reciprocitní (viz kap. 3.6.4).

Abychom mohli sestavovat vodivostní matici obvodu přímo ze schématu i v případě, že obvod obsahuje řízené zdroje, je vhodné definovat tzv. **razítkové matice** jednotlivých obvodových prvků.

Poznali jsme již, že vodivost G rezistoru zapojeného mezi uzly i a j se objeví ve vodivostní matici celkem čtyřikrát, a to s kladným znaménkem v prvcích matice G_{ii} a G_{jj} a se záporným znaménkem v prvcích G_{ij} a G_{ji}. Můžeme si to představit jako otisk „razítka“ rezistoru (ve tvaru čtvercové matice) v řádcích a sloupcích i, j.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} +G & -G \\ -G & +G \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.57}$$

Každý rezistor má svoje „razítko“ s konkrétními indexy řádků a sloupců, odpovídajícími označení uzlů, ke kterým je rezistor připojen. Vodivost G (s příslušným znaménkem) bude přičtena k prvkům matice, které leží na průsečíku řádku a sloupce s odpovídajícími indexy. Je-li rezistor zapojen mezi uzel i a referenční uzel, vodivost G se objeví v matici pouze jedenkrát – a to v prvku y_{ii}, neboť v matici řádek ani sloupec odpovídající referenčnímu uzlu není.

Podobně můžeme sestavit i razítko pro zdroj proudu řízený napětím. Jsou-li řídicí uzly zdroje (vstup) např. a a b, výstupní uzly c a d, má razítko tvar

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} +g_m & -g_m \\ -g_m & +g_m \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.58}$$

Tak např. pro model zesilovacího stupně na **Obr. 3.36b**, kde se nacházejí čtyři rezistory a jeden zdroj proudu řízený napětím, a které jsou připojeny k uzlům značeným jako *B*, *C*, *E*, mají tato razítka následující tvary:

– rezistory

$$\begin{array}{c|cc} & B & E \\ \hline B & +G_{BE} & -G_{BE} \\ E & -G_{BE} & +G_{BE} \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} & B & C \\ \hline B & +G_f & -G_f \\ C & -G_f & +G_f \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} & C \\ \hline C & +G_C \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} & E \\ \hline E & +G_e \end{array}, \qquad (3.59)$$

– zdroj proudu řízený napětím

$$\begin{array}{c|cc} & B & E \\ \hline C & +g_m & -g_m \\ E & -g_m & +g_m \end{array} \quad . \qquad (3.60)$$

Výše popsaným postupem se můžeme přesvědčit, že použití těchto razítek vede skutečně na vodivostní matici podle rovnice (3.56).

Výpočet vstupního odporu obvodu a činitele přenosu

Často potřebujeme vypočítat **vstupní odpor** obvodu, tj. odpor, který bychom naměřili mezi dvěma jeho uzly, např. mezi uzly, ke kterým je připojen zdroj vstupního signálu. Při výpočtu předpokládáme, že v obvodu žádné další nezávislé zdroje nejsou. Obvod však může obsahovat závislé zdroje napětí i proudu. Dále nás často zajímá, jak obvod zpracovává vstupní signál a jak jej přenáší na výstupní svorky. To je obvykle charakterizováno tzv. **činitelem přenosu napětí**, tj. poměrem výstupního napětí k napětí na vstupu.

K výpočtu obou veličin použijeme metodu uzlových napětí. Uzly obvodu je výhodné očíslovat tak, že „živé“ vstupní svorce přidělíme pořadové číslo 1 a „mrtvou“ svorku zvolíme za referenční uzel. „Živou“ výstupní svorku označíme pořadovým číslem 2. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že vstup i výstup mají jednu (tj. „mrtvou“) svorku společnou.

Uvažujeme, že jsme do uzlu 1 přivedli proud I_1 z nezávislého proudového zdroje. Ten se objeví jako jediný nenulový prvek v prvním řádku vektoru $\mathbf{I}_z$ pravých stran. Řešením obvodu vypočítáme vstupní napětí

$$U_1 = \frac{\Delta_{1:1}}{\Delta} I_1 \ , \qquad (3.61)$$

výstupní napětí pak

$$U_2 = \frac{\Delta_{1:2}}{\Delta} I_1 \quad . \qquad (3.62)$$

V těchto výrazech znamená:

Δ – determinant vodivostní matice $\mathbf{G}$,

$\Delta_{1:1}$ – determinant matice, která z původní matice $\mathbf{G}$ vznikne po vynechání 1. řádku a 1. sloupce,

$\Delta_{1:2}$ – záporně vzatý determinant matice, která z původní matice **G** vznikne po vynechání 1. řádku a 2. sloupce.

Ze vztahu (3.61) pak vstupní odpor určíme jako poměr U_1/I_1, tedy

$$R_{vst} = \frac{\Delta_{1:1}}{\Delta} \quad . \tag{3.63}$$

Činitel přenosu napětí K_u určíme ze vztahů (3.61) a (3.62) jako poměr U_2/U_1, tj.

$$K_u = \frac{\Delta_{1:2}}{\Delta_{1:1}} \quad . \tag{3.64}$$

Poznámka:

Determinanty $\Delta_{1:1}$ a $\Delta_{1:2}$ (včetně příslušných znamének) se nazývají jako algebraické doplňky. Obecněji, pro algebraický doplněk $\Delta_{i:j}$, je jeho znaménko rovno $(-1)^{i+j}$, kde *i* je řádek a *j* sloupec, které se z dané matice vypouštějí. Pokud bychom tedy za jinak stejných předpokladů napájeli zdrojem proudu *i*–tý uzel, vstupní odpor vzhledem k tomuto uzlu a uzlu referenčnímu by byl roven $R_{vst} = \Delta_{i:i}/\Delta$ a činitel přenosu napětí mezi *i*–tým a *j*–tým uzlem $K_u = \Delta_{i:j}/\Delta_{i:i}$.

Příklad 3.22:

Vypočítáme vstupní odpor a přenos napětí tranzistorového zesilovacího stupně, jehož schéma je na **Obr. 3.35**. Vstup obvodu je mezi bází tranzistoru a referenčním uzlem, výstup mezi kolektorem a referenčním uzlem. Numerické hodnoty parametrů jsou $R_{BE}=5\ k\Omega$, $R_e=200\ \Omega$, $R_C=2\ k\Omega$, $R_f=50\ k\Omega$, $g_m=40\ mS$. V souladu s tím, co bylo uvedeno, přidělíme bázi pořadové číslo 1 a kolektoru pořadové číslo 2. Pak bude vodivostní matice rovna (hodnoty jsou v milisiemensech)

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.22 & -0.02 & -0.2 \\ 39.98 & 0.52 & -40 \\ -40.2 & 0 & 45.2 \end{bmatrix} \end{array} .$$

Numerické hodnoty determinantu a příslušných algebraických doplňků jsou

$$\Delta = |\mathbf{G}| = 4.972\,,\quad \Delta_{1:1} = \begin{vmatrix} 0.52 & -40 \\ 0 & 45.2 \end{vmatrix} = 23.504 \quad \text{a} \quad \Delta_{1:2} = -\begin{vmatrix} 39.98 & -40 \\ -40.2 & 45.2 \end{vmatrix} = -199.096\,.$$

Vstupní odpor a činitel přenosu napětí jsou pak rovny

$$R_{vst} = \frac{\Delta_{1:1}}{\Delta} = 4,\overline{72}\ k\Omega \qquad \text{a} \qquad K_u = \frac{\Delta_{1:2}}{\Delta_{1:1}} = -8,4707\ .$$

Závěry k metodě uzlových napětí:

1. Metoda je vhodná pro ruční i počítačové řešení jednoduchých i velmi složitých obvodů.

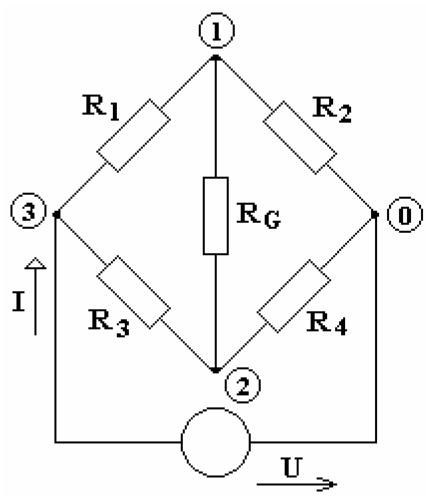
2. Umožňuje řešit i obvody se zdroji proudu řízenými napětím, které jsou obsaženy ve většině náhradních schémat bipolárních i unipolárních tranzistorů. V tomto případě však není vodivostní (admitanční) matice symetrická podle hlavní diagonály.
3. Metoda má však i nevýhody – neřeší totiž přímo obvody s některými obvodovými prvky, jmenovitě:

   a) s ideálními zdroji napětí (nezávislými i řízenými),
   b) s operačními zesilovači,
   c) s magneticky vázanými cívkami.

V principu je možné řešit i výše uvedené případy, je však zpravidla nutné psát rovnice podle I. Kirchhoffova zákona pro každý uzel jednotlivě a provádět příslušné úpravy pro získání výsledné maticové soustavy rovnic. Uvedené nevýhody odstraňuje **modifikovaná** (upravená) **metoda uzlových napětí**. Než přistoupíme k popisu této metody, vysvětlíme na příkladu, jak lze při „ručním" řešení obejít problém ad a), tedy obsahuje-li obvod větev s ideálním napěťovým zdrojem.

Příklad 3.23:

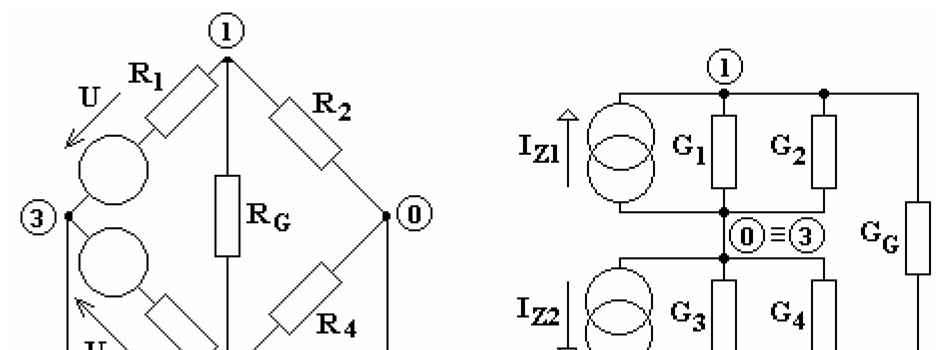
Řešte můstkové zapojení podle **Obr. 3.37** užitím metody uzlových napětí. Hodnoty prvků obvodu jsou: $U = 2\text{V}$, $R_1 = R_3 = 20\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_4 = 10\Omega$ a $R_G = 25\Omega$.



Obr. 3.37: Můstkové zapojení s ideálním zdrojem napětí

Nejdříve použijeme metodu **přemístění ideálního napěťového zdroje za uzel**. Přemístění provedeme např. vzhledem k uzlu 3, přičemž původní napěťový zdroj je nahrazen zkratem, viz **Obr. 3.38a**.

Je zřejmé, že napěťové poměry v přilehlých smyčkách, a tedy ani v celém obvodu, se nezměnily. Navíc nám uzly 3 a 0 splynuly v uzel jeden. Větve s přemístěnými napěťovými zdroji již obsahují rezistory, které jsou považovány za vnitřní odpory. Proto lze provést jejich přepočet na ekvivalentní zdroje proudové, jak ukazuje **Obr. 3.38b**.



Obr. 3.38: Přemístění ideálního napěťového zdroje za uzel

Maticová rovnice MUN má tvar

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_G & -G_G \\ -G_G & G_3 + G_4 + G_G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ I_{z2} \end{bmatrix} \quad .$$

Jejím řešením dostáváme pro uzlová napětí

$$U_{10} = 1{,}136\ V\,,\ U_{20} = 0{,}7654\ V\,,$$

pro větvové proudy pak obdržíme

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{Z1} - G_1 U_{10} = 43{,}2\,mA & \qquad I_4 &= G_4 U_{20} = 76{,}54\,mA \\ I_2 &= G_2 U_{10} = 28{,}4\,mA \qquad , & \qquad I_G &= G_G\left(U_{10} - U_{20}\right) = 14{,}82\,mA \quad . \\ I_3 &= I_{Z2} - G_3 U_{20} = 61{,}73\,mA & \qquad I &= I_1 + I_3 = 104{,}9\,mA \end{aligned}$$

Ukážeme ještě jeden možný postup výpočtu. Je-li v obvodu jen jeden napěťový zdroj, je výhodné jeden jeho pól ztotožnit s uzlem referenčním (což je v zapojení na **Obr. 3.37** splněno). Tím se stává jeho napětí přímo jedním napětím uzlovým. Rovnice dle I. K. z pak sestavujeme jen pro zbylé nezávislé uzly, neboť jedno uzlové napětí se tak stalo již veličinou známou (a objeví se na pravé straně soustavy rovnic). Můžeme psát

– pro uzel 1

$$(U_{10} - U)G_1 + U_{10}G_2 + (U_{10} - U_{20})G_G = 0 \quad ,$$

– pro uzel 2

$$U_{20}G_4 + (U_{20} - U_{10})G_G + (U_{20} - U)G_3 = 0 \quad .$$

Po úpravě dostáváme soustavu rovnic v maticovém tvaru

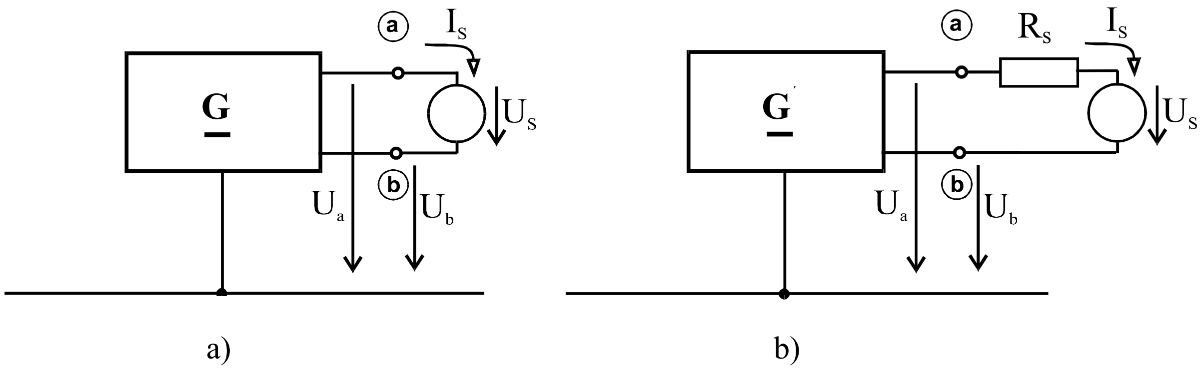
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_G & -G_G \\ -G_G & G_3 + G_4 + G_G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UG_1 \\ UG_3 \end{bmatrix} \quad .$$

Obdrželi jsme stejný výsledek jako při užití metody přemístění ideálního napěťového zdroje za uzel, neboť vnitřní proudy náhradních zdrojů proudu jsou rovny $I_{z1} = UG_1$ a $I_{z2} = UG_3$.

3.5.4 Modifikovaná metoda uzlových napětí (MMUN)

Modifikovaná metoda uzlových napětí vychází z klasické metody uzlových napětí, tj. vektor neznámých veličin obsahuje především uzlová napětí, orientovaná od jednotlivých nezávislých uzlů k referenčnímu uzlu. Vektor neznámých veličin je však rozšířen o některé proudy, jmenovitě o proudy ideálních zdrojů napětí (nezávislých i řízených), vstupní proudy zdrojů řízených proudem, výstupní proudy ideálních operačních zesilovačů a (jak uvidíme v předmětu *Elektrotechnika 2*) o proudy induktory, zvláště induktory se vzájemnou vazbou.

Na **Obr. 3.39a** je nakresleno schéma soustavy obsahující ideální zdroj napětí.



Obr. 3.39: K modifikované metodě uzlových napětí

Zdroj byl z obvodu vyjmut a na obrázku je naznačeno, že je ke zbytku obvodu připojen v uzlech *a* a *b*. Zbytek obvodu je popsán klasickými rovnicemi pro uzlová napětí a má vodivostní (admitanční) matici $\mathbf{G}$. Bez přidaného zdroje napětí U_s mají tedy rovnice tvar

$$\mathbf{GU} = \mathbf{I_z} \quad , \tag{3.65}$$

kde vektor $\mathbf{U}$ obsahuje uzlová napětí obvodu včetně obou napětí U_a a U_b. Proud přidaného zdroje I_s bude novou, poslední položkou ve vektoru neznámých veličin. Proud vytéká z uzlu *a* a vtéká do uzlu *b*. Proto při formulaci rovnic 1. K. z. proud I_s přičteme k levé straně rovnice pro uzel *a* a odečteme od levé strany rovnice uzlu *b*. Rovnice doplníme vztahem dle II. K. z.

$$U_a - U_b = U_s \quad , \tag{3.66}$$

který odráží skutečnost, že rozdíl napětí mezi oběma uzly je určen napětím přidaného zdroje. V případě, že zdroj má nenulový vnitřní odpor R_s, viz **Obr. 3.39b**, je možno tento odpor respektovat a přitom zachovat počet rovnic. Rozdíl napětí mezi uzly *a* a *b* je pak zvětšen o úbytek na tomto odporu. Po převedení tohoto úbytku na levou stranu rovnice máme

$$U_a - U_b - R_s.I_s = U_s \quad . \tag{3.67}$$

V maticovém tvaru pak výsledné rovnice vypadají takto:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & I_s \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ I_s \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} & & +1 \\ & & -1 \\ \hline +1 & -1 & -R_s \end{array}\right] \end{array} \times \left[\begin{array}{c} U_a \\ U_b \\ \hline I_s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \hline U_s \end{array}\right] . \qquad (3.68)$$

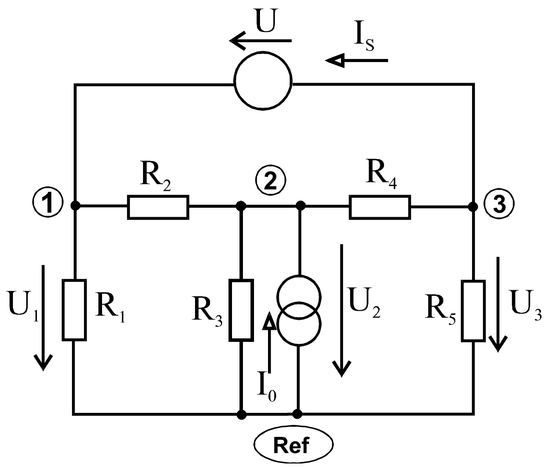
Slabými čarami jsou v matici odděleny čtyři submaice. V levém horním rohu je čtvercová admitanční matice regulární části obvodu (tj. té části, která má vodivostní matici a může být tudíž popsána klasickou metodou uzlových napětí). Prvky této matice jsou vlastní a vzájemné vodivosti uzlů. V pravém dolním rohu je naopak čtvercová matice odporů (impedanční matice) zdrojů napětí. Obě zbývající submatice jsou obecně obdélníkové a bezrozměrné.

Násobíme-li matici vektorem neznámých, pak jedničky v posledním sloupci matice jsou násobeny proudem I_s tak, jak to odpovídá situaci, kdy proud vytéká z uzlu a a vtéká do uzlu b. Jedničky v posledním řádku pak jsou násobeny napětími U_a resp. U_b a odpor $-R_s$ proudem zdroje I_s, jak předepisuje rovnice (3.67) pro rozdíl napětí na svorkách zdroje. Symbolicky zapsána má rovnice (3.68) tvar

$$\mathbf{HV} = \mathbf{J}_{\mathbf{z}} \quad . \qquad (3.69)$$

Poznámka:

Jak jsme poznali, uvedený modifikovaný zápis lze použít jak v případě, kdy je R_s rovno nule, tak i v případě, kdy je od nuly různé. Také napětí zdroje může být nulové. Potom dostáváme rovnice, ze kterých můžeme přímo počítat proud, který teče zvoleným rezistorem, případně i proud zkratovou spojkou (např. ampérmetrem, sepnutým spínačem).
Postup blíže objasňuje následující příklad. Modifikovanou metodou uzlových napětí řešíme obvod na **Obr. 3.40**.



Obr. 3.40: Způsob řešení obvodu MMUN

Obvod obsahuje jeden ideální zdroj proudu a jeden ideální zdroj napětí. Vektor neznámých bude obsahovat tři napětí nezávislých uzlů a jeden proud zdroje napětí. V maticovém tvaru pak budou rovnice pro neznámé obvodové veličiny vypadat takto:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ I_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & I_s \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} G_1+G_2 & -G_2 & 0 & -1 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_4 & -G_4 & 0 \\ 0 & -G_4 & G_4+G_5 & +1 \\ \hline -1 & 0 & +1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \hline I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_0 \\ 0 \\ \hline U \end{bmatrix} \quad . \qquad (3.70)$$

Čtvercová submatice třetího řádu obsahuje vlastní a vzájemné vodivosti uzlů a sestavuje se způsobem obvyklým pro klasickou metodu uzlových napětí. Totéž platí pro první tři prvky vektoru pravých stran. Prvek –1 ve čtvrtém sloupci prvního řádku respektuje skutečnost, že do uzlu 1 proud I_s vtéká, prvek +1 ve čtvrtém sloupci třetího řádku pak to, že proud I_s z uzlu 3 vytéká. Protože k uzlu 2 není větev s proudem I_s vůbec připojena, nachází se na příslušném místě matice, tedy ve čtvrtém sloupci druhého řádku, nula. Poslední řádek pak odpovídá rovnici dle II. Kirchhoffova zákona pro smyčku, ve které se nachází větev s ideálním zdrojem napětí a tedy i proudem I_s jako další neznámou veličinou, tj.

$$-U_1 + U_3 = U \quad . \qquad (3.71)$$

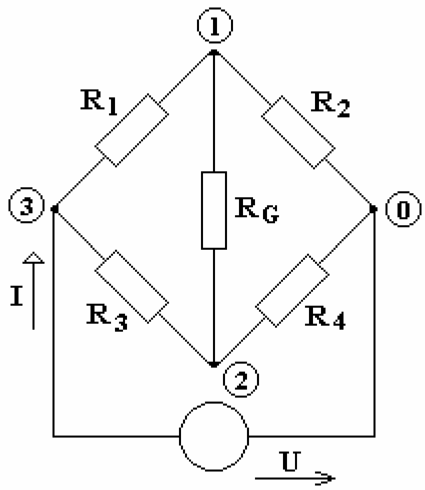
Příklad 3.24:

Vyřešte můstkové zapojení z ***Příklad 3.23*** užitím modifikované metody uzlových napětí, viz **Obr. 3.41**. Hodnoty prvků: $U = 2\text{V}$, $R_1 = R_3 = 20\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_4 = 10\Omega$ a $R_G = 25\Omega$.

Obvod má tři nezávislé uzly, máme tedy tři neznámá uzlová napětí U_1, U_2 a U_3. Další neznámou veličinou je proud I větví s ideálním zdrojem napětí.

Podle II. Kirchhoffova zákona platí:

$$U_{30} - U = 0 \Rightarrow U_{30} = U \,.$$



Obr. 3.41: Můstkové zapojení v MMUN

Předchozí rovnice se objeví v posledním řádku maticového zápisu soustavy rovnic:

$$\begin{pmatrix} G_1+G_2+G_G & -G_G & -G_1 & 0 \\ -G_G & G_3+G_4+G_G & -G_3 & 0 \\ -G_1 & -G_3 & G_1+G_3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U \end{pmatrix}$$

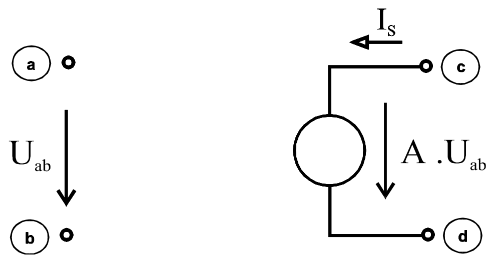
Dosazením numerických hodnot a vyřešením soustavy dostáváme:

$$U_{10} = 1.136\ V,\ U_{20} = 0.7654\ V,\ U_{30} = 2\ V,\quad I = 0.1049\ A,$$

což je v souladu s výsledky ***Příklad 3.23***.

Řízené zdroje v modifikované metodě uzlových napětí

Zdroj napětí řízený napětím (ideální zesilovač napětí) je připojen ke zbytku obvodu ve čtyřech uzlech: uzly *a, b* jsou řídicí, uzly *c, d* jsou uzly samotného zdroje, viz **Obr. 3.42**.



Obr. 3.42: Zdroj napětí řízený napětím v MMUN

Proud zdroje I_s vytéká z ulu c a vtéká do uzlu d. Napětí mezi výstupními uzly je úměrné rozdílu napětí mezi řídicími uzly

$$U_c - U_d = A(U_a - U_b)\ , \tag{3.72}$$

kde konstanta úměrnosti A je napěťové zesílení. Protože všechna čtyři napětí jsou neznámá, převedeme všechny členy na levou stranu rovnice

$$-AU_a + AU_b + U_c - U_d = 0\ . \tag{3.73}$$

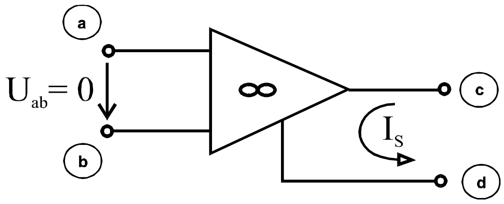
Příspěvek takového řízeného zdroje k celkové matici obvodu je pak vyjádřen razítkem tvaru

$$\begin{array}{c} \\ c \\ d \\ I_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & I_s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & +1 \\ & & & & -1 \\ \hline -A & +A & +1 & -1 & \end{array}\right] \end{array} \tag{3.74}$$

Pravé strany rovnic nejsou řízeným zdrojem ovlivněny. Rovnici pro napětí (3.73) můžeme dělit zesílením A (předpokládáme samozřejmě, že je od nuly různé). Pak dostaneme jiný tvar razítka, který ovšem dává stejné výsledky:

$$\begin{array}{c} \\ c \\ d \\ I_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & I_s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & +1 \\ & & & & -1 \\ \hline -1 & +1 & \dfrac{1}{A} & -\dfrac{1}{A} & \end{array}\right] \end{array}\ . \tag{3.75}$$

Jestliže nyní uvažujeme, že zesílení A roste nade všechny meze, dostaneme razítko pro **ideální operační zesilovač**, viz **Obr. 3.43**.



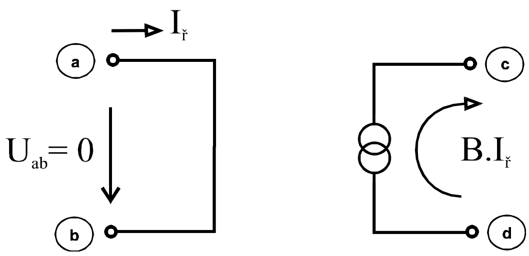
Obr. 3.43: Ideální operační zesilovač v MMUN

Protože se ve sloupcích c a d razítka (3.75) objeví pouze nuly, razítková matice IOZ je

$$\begin{array}{c} \\ c \\ d \\ I_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & I_s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} & & +1 \\ & & -1 \\ \hline -1 & +1 & \end{array}\right] \end{array} . \qquad (3.76)$$

Jedničky v posledním řádku razítkové matice (3.76) vyjadřují skutečnost, že vstupní napětí ideálního operačního zesilovače je rovno nule (napětí uzlů *a, b* jsou rovna).

Pro **zdroj proudu řízený proudem** (ideální zesilovač proudu) zavedeme vstupní (řídící) proud $I_ř$ tekoucí zkratovou spojkou mezi uzly a a b jako novou veličinu, viz **Obr. 3.44**.

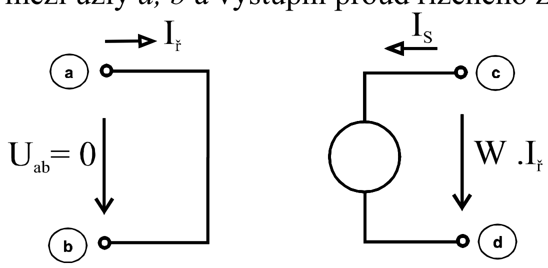


Obr. 3.44: Zdroj proudu řízený proudem v MMUN

Razítko zdroje proudu řízeného proudem je pak

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ I_ř \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & I_ř \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} & & +1 \\ & & -1 \\ & & -B \\ & & B \\ \hline +1 & -1 & \end{array}\right] \end{array} . \qquad (3.77)$$

Zdroj napětí řízený proudem s převodním odporem W pak vyžaduje dva přídavné proudy, o které je třeba rozšířit vektor neznámých veličin: řídicí proud $I_ř$, tekoucí zkratovou spojkou mezi uzly *a, b* a výstupní proud řízeného zdroje I_s, viz **Obr. 3.45**.



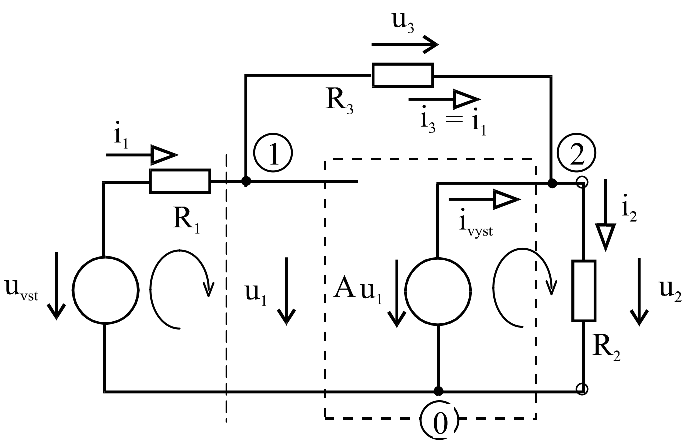
Obr. 3.45: Zdroj napětí řízený proudem v MMUN

Razítko zdroje napětí řízeného proudem má pak tvar

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ I_ř \\ I_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & I_ř & I_s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} & & & & +1 & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & +1 \\ & & & & & -1 \\ \hline +1 & -1 & & & & \\ & & +1 & -1 & -W & \end{array}\right] \end{array} . \qquad (3.78)$$

Příklad 3.25:

Užitím modifikované metody uzlových napětí určete vstupní odpor $R_{vst} = u_{vst}/i_1$ a napěťový přenos $K_u = u_2/u_{vst}$ pro zapojení se ZNŘN, které bylo řešeno v ***Příklad 3.12*** metodou úměrných veličin a v ***Příklad 3.18*** metodou smyčkových proudů, viz **Obr. 3.46**.



Obr. 3.46: Obvod s řízeným zdrojem napětí v MMUN

Neznámými veličinami budou dvě uzlová napětí u_1, u_2, vstupní proud i_1 a výstupní proud řízeného zdroje $i_{výst}$. Ačkoliv bylo v principu možné nezávislý napěťový zdroj přepočítat na ekvivalentní zdroj proudový (a snížit tak řád výsledné soustavy rovnic), je výhodné zvolit vstupní proud i_1 jako další neznámou, neboť se jedná o jednu z hledaných veličin.

Přidané rovnice dle II. K.z.:

– smyčka s proudem i_1:

$$u_1 + R_1 i_1 = u_{vst} \quad ,$$

– smyčka s proudem $i_{výst}$:

$$-Au_1 + u_2 = 0 \quad .$$

Výsledná soustava rovnic v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} G_3 & -G_3 & -1 & 0 \\ -G_3 & G_2+G_3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & R_1 & 0 \\ -A & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_{výst} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{vst} \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Pozor! Všimněte si, že k celkové vlastní vodivosti uzlu 1 se nezapočítává vodivost rezistoru R_1, neboť tento se objeví v rovnici podle II. K. z. (části obvodu, které podléhají modifikaci, jsou v obrázku odděleny čárkovaně).

Další praktický postup by spočíval v dosazení numerických hodnot a vyřešení soustavy rovnic nejlépe pomocí počítače. Abychom však mohli srovnat výsledky s obecným řešením nalezeným v ***Příklad 3.12*** a ***Příklad 3.18***, odvodíme hledané veličiny analyticky i zde.

S výhodou využijeme skutečnosti, že matice soustavy je řídkou maticí. Pro její determinant pak můžeme psát (rozvíjíme podle 4. sloupce):

$$\Delta = -1 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} G_3 & -G_3 & -1 \\ 1 & 0 & R_1 \\ -A & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{(1-A)R_1 + R_3}{R_3} .$$

Výstupní napětí nalezneme užitím Cramerova pravidla jako $u_2 = \Delta_2 / \Delta$, kde

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} G_3 & 0 & -1 & 0 \\ -G_3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & u_{vst} & R_1 & 0 \\ -A & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = u_{vst} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} G_3 & -1 & 0 \\ -G_3 & 0 & -1 \\ -A & 0 & 0 \end{vmatrix} = A u_{vst} ,$$

tedy

$$u_2 = \frac{AR_3}{(1-A)R_1 + R_3} u_{vst} \quad \text{a napěťový přenos} \quad K_u = \frac{u_2}{u_{vst}} = \frac{AR_3}{(1-A)R_1 + R_3} .$$

Pro vstupní proud platí $i_1 = \Delta_3 / \Delta$, kde

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} G_3 & -G_3 & 0 & 0 \\ -G_3 & G_2+G_3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & u_{vst} & 0 \\ -A & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = u_{vst} \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} G_3 & -G_3 & 0 \\ -G_3 & G_2+G_3 & -1 \\ -A & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1-A}{R_3} u_{vst} ,$$

tedy

$$i_1 = \frac{1-A}{(1-A)R_1 + R_3} u_{vst} \quad \text{a vstupní odpor} \quad R_{vst} = \frac{u_{vst}}{i_1} = R_1 + \frac{R_3}{1-A} .$$

Obdrželi jsme identické vztahy jako v ***Příklad 3.12*** a ***Příklad 3.18***.

Razítkové matice jednotlivých prvků obvodu mají následující tvary:

– ZNŘN: $\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & i_{výst} \\ \hline 2 & & & -1 \\ i_{výst} & -A & +1 & \end{array}$, – nezávislý ZN: $\begin{array}{c|cc} & 1 & i_1 \\ \hline 2 & & -1 \\ i_1 & 1 & R_1 \end{array}$,

– rezistor R_3: $\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & +G_3 & -G_3 \\ 2 & -G_3 & +G_3 \end{array}$, – rezistor R_2: $\begin{array}{c|c} & 2 \\ \hline 2 & +G_2 \end{array}$.

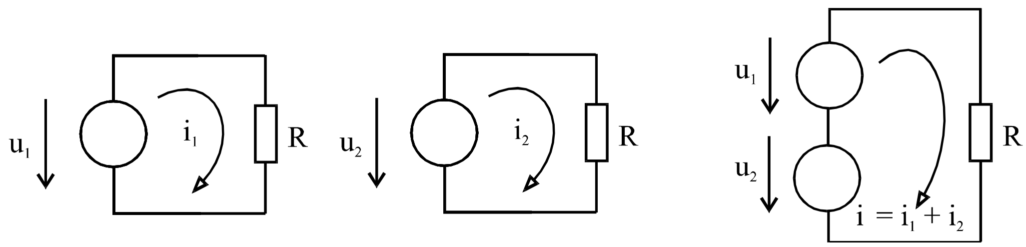
V maticích se samozřejmě nevyskytuje uzel referenční, proto jsou jejich tvary poněkud redukované oproti obecnému popisu uvedenému výše.

3.6 Některé věty a principy elektrických obvodů

3.6.1 Princip superpozice

Princip superpozice nebo-li princip nezávislého působení je obecný fyzikální princip platný v libovolné **lineární soustavě**, podle kterého **účinek součtu příčin je roven součtu účinků jednotlivých příčin působících samostatně**. Tento princip může velmi usnadnit analýzu jednoduchých **lineárních elektrických obvodů**, kde jsou příčinami napětí a proudy nezávislých budicích zdrojů a odezvami napětí a proudy prvků obvodu.

Uvažujme jednoduchý obvod **s lineárním rezistorem** *R*, nakreslený na **Obr. 3.47a**.



a) b) c)

Obr. 3.47: K vysvětlení principu superpozice
Obvod je napájen napětím u_1 a teče jím proud $i_1=u_1/R$. Použijeme-li (jiného) napětí na vstupu u_2, bude proud obvodem roven $i_2=u_2/R$, viz **Obr. 3.47b**. Jestliže nyní necháme obě napětí působit současně, jak uvádí **Obr. 3.47**c, bude na vstupu napětí $u=u_1+u_2$ a celkový proud bude roven

$$i = \frac{u}{R} = \frac{u_1 + u_2}{R} = \frac{u_1}{R} + \frac{u_2}{R} = i_1 + i_2 \quad . \qquad (3.79)$$

Výsledný proud je tedy dán prostým **součtem**, **superpozicí**, účinků obou dílčích napětí.

Zcela **jiná situace** nastane v případě, kdy **rezistor** bude **nelineární**. Předpokládejme velmi jednoduchý případ, kdy má charakteristika rezistoru parabolický tvar, tedy

$$i = a.u^2 \quad . \qquad (3.80)$$

Pak při napětí u_1 bude proud obvodem $i_1=a.u_1^2$, při napětí u_2 bude proud $i_2=a.u_2^2$. Necháme-li obě napětí působit současně, bude celkový proud

$$i = a.u^2 = a.(u_1 + u_2)^2 = a.u_1^2 + a.u_2^2 + 2.a.u_1.u_2 = i_1 + i_2 + 2.a.u_1.u_2 \quad , \qquad (3.81)$$

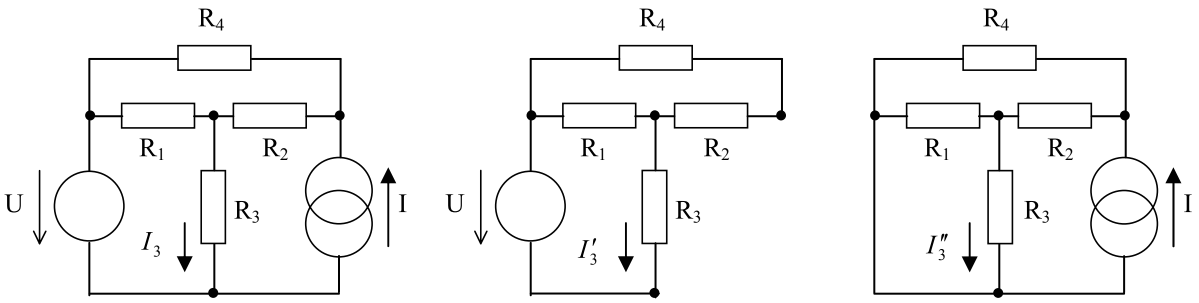
bude se tedy o $2au_1u_2$ lišit od prostého součtu odezev obvodu na dílčí napětí.

Tento dodatečný člen existuje pouze tehdy, působí-li oba signály u_1 a u_2 současně. Při větším počtu dílčích signálů by byla situace ještě daleko složitější. **Superpozice tedy platí pouze v lineárním obvodu, v nelineárním obvodu neplatí**.

Předchozí výklad uvažoval pro jednoduchost elementární obvod s jediným pasivním obvodovým prvkem. Libovolně složitou lineární obvodovou soustavu však můžeme převést postupným zjednodušováním (jak jsme poznali v kap. 3.4.1) na výše uvažovaný elementární model soustavy. Princip superpozice proto platí pro libovolnou lineární obvodovou soustavu.

Příklad 3.26

Uvažujme jednoduchý lineární rezistorový obvod (přemostěný T-článek) na **Obr. 3.48**a, který je napájen současně ze zdroje napětí i proudu. Máme vypočítat proud rezistorem R_3.



a) b) c)

Obr. 3.48: K použití principu superpozice pro analýzu jednoduchých obvodů

Řešení provedeme ve dvou krocích. Nejprve vyřadíme zdroj proudu vpravo tím, že příslušnou větev rozpojíme (**Obr. 3.48b**). Je to proto, protože vnitřní odpor ideálního zdroje proudu je nekonečný. Celkový odpor z hlediska svorek zdroje napětí je roven $R = R_3 + R_1 \parallel (R_2 + R_4)$, viz také ***Příklad 3.9***, dílčí proud rezistorem R_3 je proto roven

$$I_3' = \frac{U}{R_3 + \dfrac{R_1(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4}} .$$

Poté vyřadíme zdroj napětí tím, že jej zkratujeme (**Obr. 3.48b**). To je proto, protože vnitřní odpor ideálního zdroje napětí je roven nule. Naopak necháme v obvodu působit zdroj proudu vpravo. Pro výpočet dílčího proudu I_3'' můžeme použít např. dvojnásobnou aplikaci vzorce pro proudový dělič, viz ***Příklad 3.6***. Nejprve se proud I dělí mezi rezistor R_4 a sériově-paralelní kombinaci rezistorů $R_2 + R_1 \parallel R_3$. Proud I_2'', který protéká rezistorem R_2, je pak vstupním proudem pro následný proudový dělič tvořený rezistory R_1 a R_3. Sloučením obou mezivýsledků pak dostaneme

$$I_3'' = \frac{IR_4}{R_4 + R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} .$$

Celkový proud je pak roven **algebraickému součtu** proudů dílčích, tzn. kdy bereme ohled na jejich směry vzhledem ke směru proudu výsledného. V našem případě tedy

$$I_3 = I_3' + I_3''\ .$$

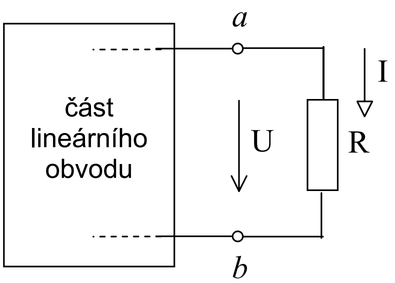
Další příklad na použití principu superpozice při analýze elektrických obvodů byl diskutován v kap. 3.4.1, v souvislosti s metodou postupného zjednodušování obvodu. Je však zřejmé, že použití této metody by nebylo efektivní pro řešení obvodů s více nezávislými zdroji. V těchto případech saháme po některé univerzální metodě. Dále je nutno pamatovat, že nelze v žádném případě vyřazovat i zdroje řízené, které svoji funkci musí plnit i při působení dílčích zdrojů nezávislých.

Princip superpozice má však v teorii obvodů velký význam při různých teoretických úvahách a odvozeních. Praktické uplatnění nalezne také při analýze přechodných dějů, dále při analýze periodického ustáleného stavu, kdy je obvod buzen dvěma (nebo více) zdroji nestejných frekvencí aj. S některými jeho dalšími aplikacemi se setkáme v kurzu *Elektrotechnika 2*.

3.6.2 Věty o náhradních zdrojích

Věty o náhradních zdrojích, Théveninova a Nortonova, patří k velmi užitečným a často užívaným nástrojům při analýze lineárních elektrických obvodů. Pro jejich objasnění můžeme postupovat následovně.

Po připojení větve s rezistorem R na část elektrického obvodu začne přes tento rezistor procházet proud I a objeví se na něm napětí U, viz **Obr. 3.49**. Část elektrického obvodu, vyvedená ke svorkám a, b, představuje vzhledem k zátěži zdroj elektrické energie.

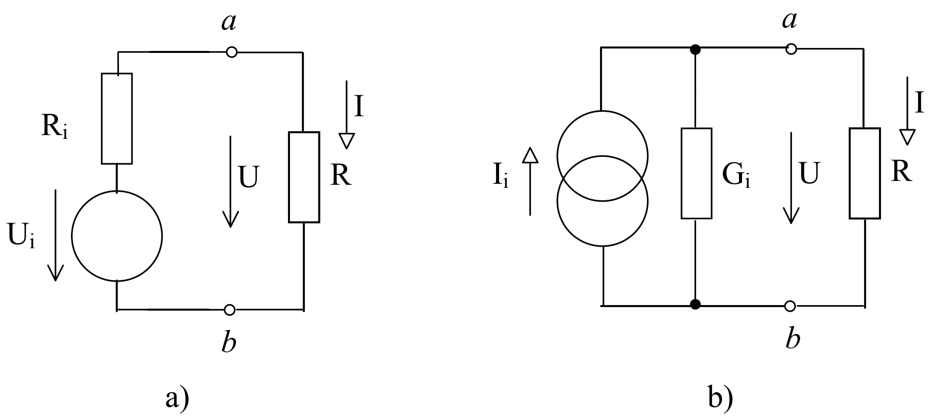


Obr. 3.49: K větám o náhradních zdrojích

Tento zdroj můžeme modelovat:

a) **napěťovým zdrojem** s vnitřním napětím U_i a vnitřním odporem R_i (**Obr. 3.50a)**,

b) **proudovým zdrojem** s vnitřním proudem I_i a vnitřní vodivostí G_i (**Obr. 3.50b)**,



Obr. 3.50: Náhradní napěťový a proudový zdroj

a) Náhrada lineárního elektrického obvodu nebo jeho části vzhledem ke dvěma jeho uzlům **náhradním napěťovým zdrojem** je známa pod názvem **Théveninova věta**:

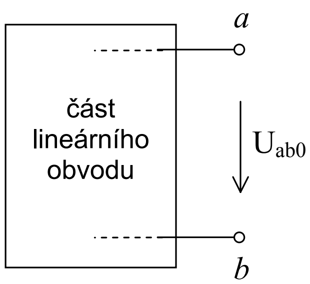
– **vnitřní napětí** U_i náhradního zdroje je rovno napětí naprázdno na svorkách *a, b* nahrazované části obvodu (**Obr. 3.51a**)

$$U_i = U_{ab0} \quad . \tag{3.82}$$

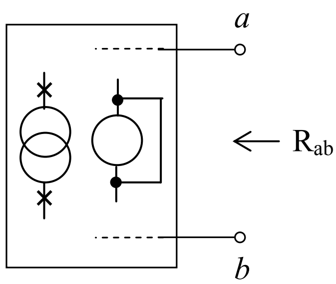
– **vnitřní odpor** R_i náhradního zdroje je roven odporu mezi svorkami *a, b*

$$R_i = R_{ab} \quad , \tag{3.83}$$

přičemž v nahrazované části obvodu jsou všechny nezávislé ideální zdroje vyřazeny, tzn. napěťové jsou nahrazeny zkratem a proudové jsou odpojeny (**Obr. 3.51b**).



a)



b)

Obr. 3.51: Vnitřní parametry náhradního napěťového zdroje

Proud rezistorem s odporem *R* je pak dán jednoduchým vztahem

$$I = \frac{U_i}{R_i + R} \quad . \tag{3.84}$$

b) Náhrada lineárního elektrického obvodu nebo jeho části vzhledem ke dvěma jeho uzlům **náhradním proudovým zdrojem** je známa pod názvem **Nortonova věta**:

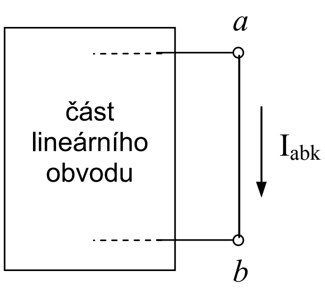
– **vnitřní proud** I_i náhradního zdroje je roven proudu, který prochází ve stavu nakrátko mezi svorkami *a, b* nahrazované části obvodu (**Obr. 3.52a**)

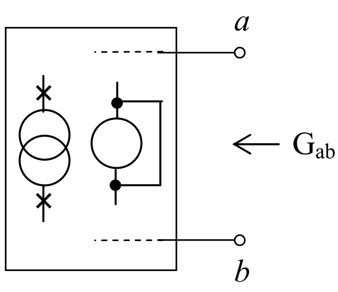
$$I_i = I_{abk} \quad . \tag{3.85}$$

– **vnitřní vodivost** G_i náhradního zdroje je rovna vodivosti mezi svorkami *a, b*

$$G_i = G_{ab} \quad , \tag{3.86}$$

přičemž v nahrazované části obvodu jsou všechny nezávislé ideální zdroje vyřazeny, tzn. napěťové jsou nahrazeny zkratem a proudové jsou odpojeny (**Obr. 3.52b**).





Obr. 3.52: Vnitřní parametry náhradního proudového zdroje

Napětí na rezistoru s vodivostí G je pak dáno vztahem

$$U = \frac{I_i}{G_i + G} \quad . \tag{3.87}$$

Pro vyřazení nezávislých zdrojů platí stejná pravidla, jaké jsme poznali při aplikaci principu superpozice. Zdroje jsou tedy nahrazovány svými vnitřními odpory. **Pozor! Jsou-li v obvodu obsaženy i zdroje řízené, nesmí se nikdy vyřazovat.** (Mohli bychom totiž obdržet obvod se zcela odlišnými vlastnostmi).

V takovémto případě se vnitřní odpor Théveninova náhradního modelu určí jako poměr napětí naprázdno a proudu nakrátko

$$R_i = \frac{U_{ab0}}{I_{abk}} \quad , \tag{3.88}$$

vnitřní vodivost Nortonova náhradního modelu naopak jako poměr proudu nakrátko a napětí naprázdno

$$G_i = \frac{I_{abk}}{U_{ab0}} \quad . \tag{3.89}$$

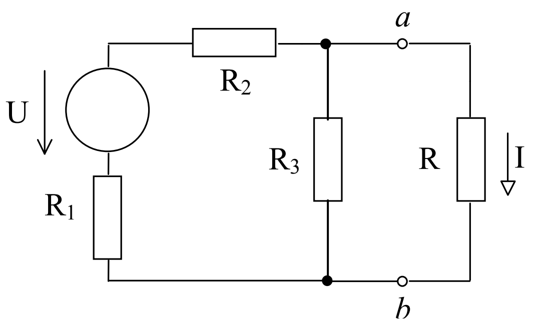
Takovýto postup stanovení vnitřního odporu R_i, resp. vnitřní vodivosti G_i, lze tedy považovat za postup obecnější. Dá se ho navíc použít i při zjišťování vnitřních parametrů náhradních modelů měřením, kdy máme k dispozici fyzikální model obvodu, a kdy může být jeho vnitřní struktura dokonce i nepřístupná.

Závěry:

– Obecné odvození Théveninovy i Nortonovy věty je založeno na předpokladu platnosti principu superpozice, proto se mohou tyto věty aplikovat pouze na lineární obvody, příp. na lineární části obvodů.
– Použití vět o náhradních zdrojích je zvláště výhodné v případech, kdy odpor R (vodivost G) rezistoru ve větvi s neznámým proudem nabývá proměnných hodnot. Zatímco by některá z univerzálních metod mohla vyžadovat opakované řešení celé soustavy rovnic, uvedené řešení vede na jednoduché vzorce (3.84) či (3.87).
– Jak poznáme dále v předmětu *Elektrotechnika 2*, metody náhradních zdrojů lze s výhodou využít i při řešení přechodných jevů v elektrických obvodech, které obsahují pouze jeden akumulační prvek (který se pak považuje za zátěž).
– Metody mohou nalézt uplatnění i při analýze obvodů nelineárních, je-li v daném obvodu obsažen jen jeden nelineární prvek (tento se totiž považuje za zátěž, zbytek obvodu je pak již lineární a lze na něj proto aplikovat věty o náhradních zdrojích).

Příklad 3.27:

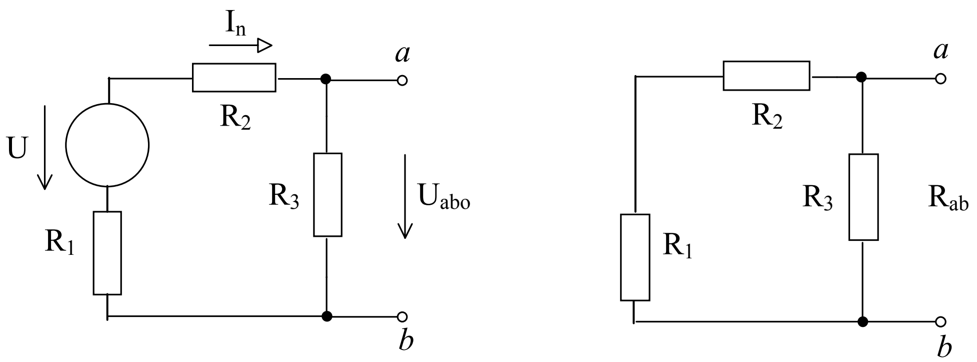
Vypočítejte proud I v obvodu podle **Obr. 3.53**.



Obr. 3.53: Řešení obvodu metodou náhradního zdroje

Pro řešení použijeme Théveninovu i Nortonovu větu. Modely náhradních zdrojů jsou uvedeny na **Obr. 3.50**.

a) Aplikace Théveninovy věty



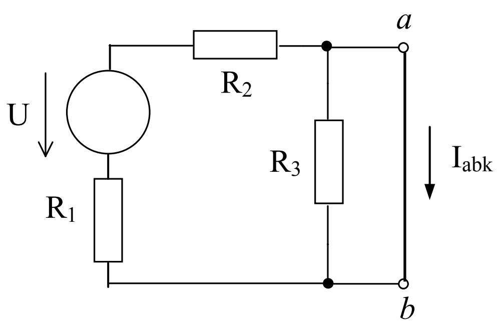
Obr. 3.54: Stanovení vnitřního napětí U_i a odporu R_i

Vnitřní napětí určíme z **Obr. 3.54a**, vnitřní odpor z **Obr. 3.54b**:

$$I_n = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad \Rightarrow \qquad U_i = U_{ab0} = R_3 I_n = U \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} ,$$

$$R_i = R_{ab} = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} .$$

b) Aplikace Nortonovy věty



Obr. 3.55: Stanovení vnitřního proudu I_i

Vnitřní proud určíme z **Obr. 3.55**, vnitřní vodivost opět z **Obr. 3.54b**:

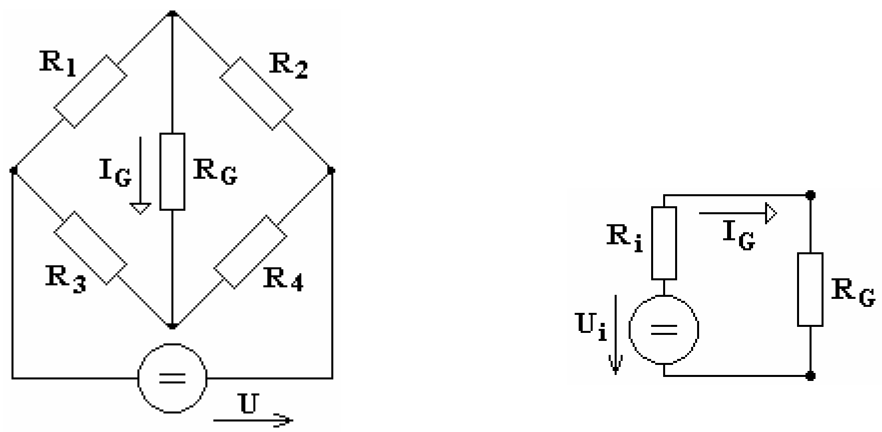
$$I_i = I_{abk} = \frac{U}{R_1 + R_2}\ , \qquad G_i = G_{ab} = G_3 + \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} = \frac{1}{R_{ab}}\ .$$

Hledaný proud zátěží:

$$I = \frac{U_i}{R_i + R}\ \text{(Théveninova věta)}, \qquad I = I_i \frac{G}{G_i + G}\ \text{(Nortonova věta)}.$$

Příklad 3.28:

V můstkovém zapojení dle **Obr. 3.56a** určete proud I_G pomocí věty o náhradním napěťovém zdroji, je-li $U = 2$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$, $R_G = 25\ \Omega$.

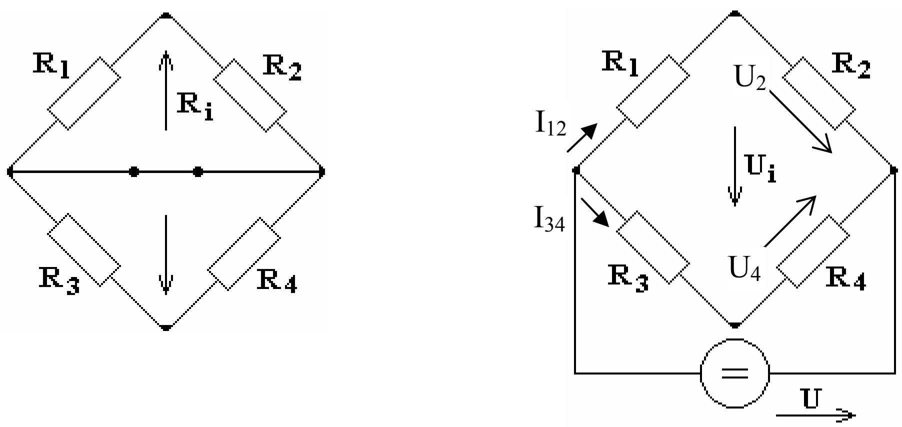


a) b)

Obr. 3.56: Můstkové zapojení a náhradní napěťový model

Vzhledem k větvi s rezistorem R_G nahradíme zbytek obvodu náhradním napěťovým zdrojem podle **Obr. 3.56b**.

Velikosti vnitřních parametrů U_i a R_i nalezneme podle zapojení na **Obr. 3.57**.



a) b)

Obr. 3.57: Stanovení parametrů U_i a R_i můstkového zapojení

Dostáváme

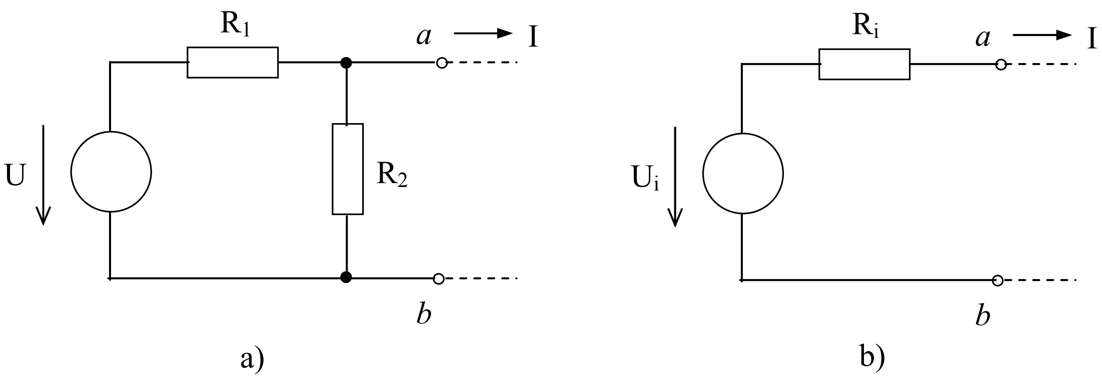
$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 20\,\Omega \quad , \quad U_i = U_2 - U_4 = U\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}\right) = 0.\overline{6}V \quad .$$

Hledaný proud je konečně roven

$$I_G = \frac{U_i}{R_i + R_G} = 14.82mA \quad .$$

Poznámka:

Typickým příkladem použití Théveninovy věty rovněž může být řešení obvodů, které začínají tzv. **zatíženým děličem** podle **Obr. 3.58a**, tj. napěťovým děličem, ze kterého je odebírán proud dalšími obvody připojenými ke svorkám *a*, *b*.



Obr. 3.58: Obvod začínající zatíženým napěťovým děličem

Část obvodu nalevo od svorek *a*, *b* lze nahradit dle Théveninovy věty náhradním napěťovým zdrojem podle **Obr. 3.58b**.
Použitím vztahu pro nezatížený napěťový dělič dostáváme pro vnitřní napětí

$$U_i = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad , \qquad (3.90)$$

pro vnitřní odpor pak

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad . \qquad (3.91)$$

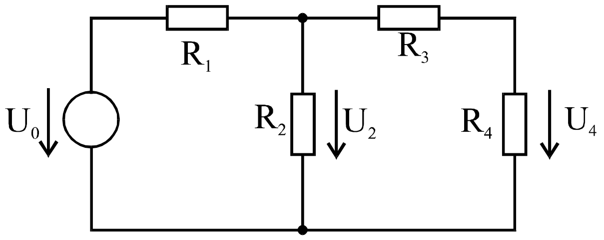
Lze např. snadno určit i výstupní napětí zatíženého děliče napětí podle **Obr. 3.58a**, je-li předepsána hodnota odebíraného proudu *I*, neboť toto napětí musí být rovno napětí U_{ab} v náhradním obvodu podle **Obr. 3.58b**, kde platí

$$U_{ab} = U_i - R_i I = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} - I\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad . \qquad (3.92)$$

Uvedený přístup k řešení obvodů, které začínají zatíženým děličem napětí, je demonstrován na jednoduchém zapojení v ***Příklad 3.29***.

Příklad 3.29:

Nalezněte výstupní napětí příčkového článku podle **Obr. 3.59**.



Obr. 3.59: Aplikace Théveninovy věty pro řešení příčkového článku

Část obvodu se zdrojem napětí U_0 a rezistory R_1 a R_2 nahradíme napěťovým zdrojem podle **Obr. 3.58b**. Vnitřní napětí je rovno napětí U_{20} (napětí na rezistoru R_2 naprázdno, tj. za předpokladu, že nejsou připojeny rezistory R_3 a R_4), tedy

$$U_i = U_{20} = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad , \qquad \text{a vnitřní odpor je roven} \qquad R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad .$$

Zátěží náhradního napěťového zdroje je pak sériové spojení rezistorů R_3 a R_4. Výstupní napětí U_4 proto snadno určíme aplikací vzorce pro nezatížený napěťový dělič jako

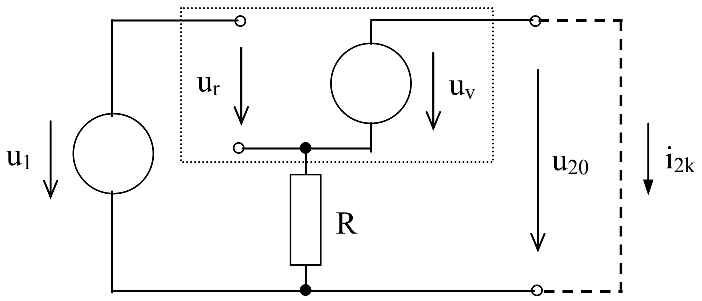
$$U_4 = U_i \frac{R_4}{R_i + R_3 + R_4} = U_0 \frac{R_2 R_4}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad .$$

Dosaďme pro kontrolu za hodnoty obvodových prvků z ***Příklad 3.7***: U_0 =5 V, R_1 =15 Ω, R_2 =10 Ω, R_3 =8 Ω a R_4 =2 Ω. Dostáváme shodný výsledek $U_4 = 0.25V$.

Nakonec ještě ukážeme, jak se dá věta o náhradním napěťovém zdroji použít pro řešení obvodu s řízeným zdrojem.

Příklad 3.30:

Určete parametry Théveninova náhradního modelu obvodu se zpětnou vazbou dle **Obr. 3.60**, který obsahuje ideální ZNŘN s napětím $u_v = Au_r$ (ideální zesilovač napětí se zesílením A).



Obr. 3.60: Zpětnovazební zapojení s ideálním ZNŘN

Protože ve stavu naprázdno neprotéká rezistorem R žádný proud (vstupní odpor ideálního zdroje napětí řízeného napětím je nekonečně velký), je na něm nulový úbytek napětí. Napětí naprázdno u_{20}, které je rovno napětí vnitřnímu u_i, je proto dáno pouze výstupním napětím ZNŘN u_v. Řídicí napětí ZNŘN u_r je z téhož důvodu rovno přímo napětí vstupnímu u_1.

Pro vnitřní napětí u_i proto dostáváme

$$u_i = u_{20} = u_v = Au_r = Au_1 \quad .$$

Jak bylo uvedeno dříve, u obvodů s řízenými zdroji se vnitřní odpor R_i stanovuje podle vztahu (3.88), tj. jako poměr napětí naprázdno a proudu nakrátko. Pro proud nakrátko platí rovnice

$$i_{2k} = \frac{u_v}{R} = \frac{Au_r}{R} = \frac{A}{R}(u_1 + Ri_{2k}) \qquad \Rightarrow \qquad i_{2k} = \frac{Au_1}{(1-A)R} \quad .$$

Proto

$$R_i = \frac{u_{20}}{i_{2k}} = (1-A)R \quad .$$

Dostali jsme zajímavý výsledek, kdy podle znaménka a velikosti zesílení A může tento vnitřní odpor nabývat kladných i záporných hodnot. Obvod se nazývá jako **zpětnovazební**, protože je část vstupní veličiny (napětí) řízeného zdroje odvozena od veličiny výstupní (proudu).

Pokud bychom nyní výstupní svorky obvodu zatížili rezistorem R_2, můžeme stanovit výstupní proud i_2 jednoduše jako

$$i_2 = \frac{u_i}{R_i + R_2} = \frac{Au_1}{(1-A)R + R_2} \quad .$$

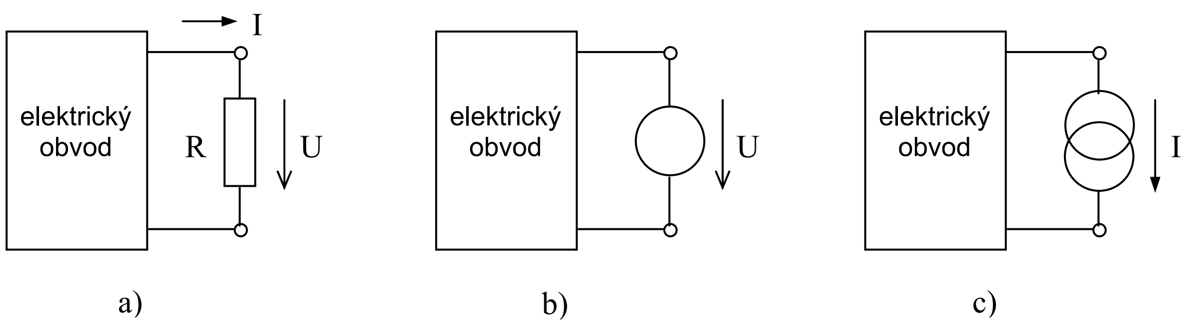
Uvažujme ještě případ, kdy necháme zesílení A růst nade všechny meze (podle kap. 2.3.3 se ideální ZNŘN stává ideálním operačním zesilovačem). Z posledního vztahu obdržíme

$$i_{2\infty} = \lim_{A\to\infty} i_2 = \lim_{A\to\infty} \frac{u_1}{(1/A - 1)R + R_2/A} = -\frac{u_1}{R} \quad .$$

Obvod jako celek se nyní chová jako ideální zdroj proudu řízený napětím (ZPŘN), se strmostí $S = -1/R$, realizovaný ovšem ve zpětnovazebním zapojení s ideálním operačním zesilovačem. Na takovou možnost realizace ideálních řízených zdrojů již bylo poukázáno v kap. 2.3.3.

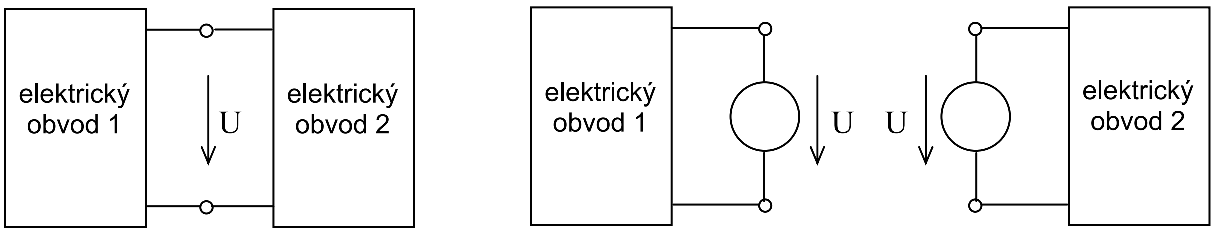
3.6.3 Princip kompenzace (substituce)

Podle **principu kompenzace** se poměry v obvodu nezmění, pokud v něm nahradíme kterýkoliv pasivní prvek nezávislým zdrojem napětí, jehož napětí je rovno napětí na nahrazovaném prvku, nebo zdrojem proudu, jehož proud je roven proudu tohoto prvku, viz **Obr. 3.61**. První variantě náhrady se také říká **napěťová kompenzace (Obr. 3.61b)**, druhé pak **proudová kompenzace (Obr. 3.61c)**.



Obr. 3.61: K principu kompenzace

Platnost principu kompenzace je založena pouze na platnosti Kirchhoffových zákonů. Z hlediska sčítání napětí ve smyčkách je totiž lhostejné, jakého jsou tato napětí původu. Totéž platí i pro sčítání proudů v uzlech. Při analýze obvodů se dá princip kompenzace využít např. tak, že se daný obvod rozdělí na samostatné jednodušší části, které je pak možno analyzovat odděleně, viz **Obr. 3.62**.

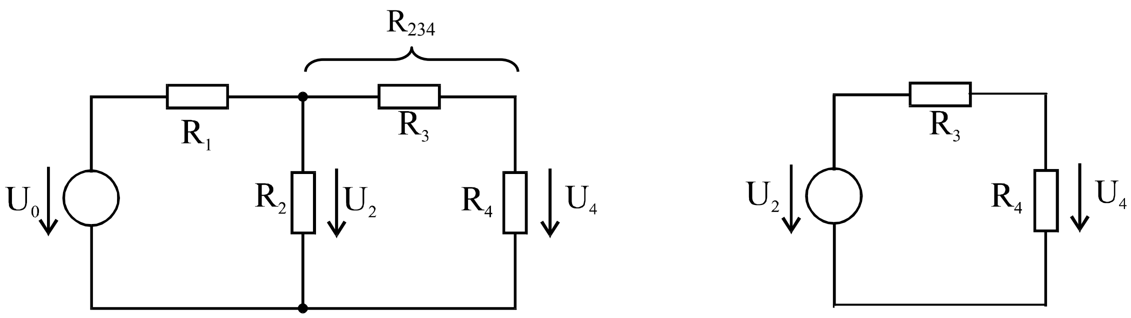


a) b)

Obr. 3.62: Rozdělení obvodu na dílčí části pomocí principu kompenzace

Příklad 3.31:

Nalezněte výstupní napětí U_4 příčkového článku dle **Obr. 3.63a** (srovnejte s ***Příklad 3.29***).



a) b)

Obr. 3.63: Aplikace principu kompenzace pro řešení příčkového článku

Nejdříve vypočítáme napětí U_2 na rezistoru R_2, a to pomocí vzorce pro napěťový dělič, který je tvořen rezistorem R_1 a sériově-paralelní kombinací rezistorů s výsledným odporem

$$R_{234} = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \quad ,$$

jak je z **Obr. 3.63a** patrné. Dostáváme

$$U_2 = U_0 \frac{R_{234}}{R_1 + R_{234}} \quad .$$

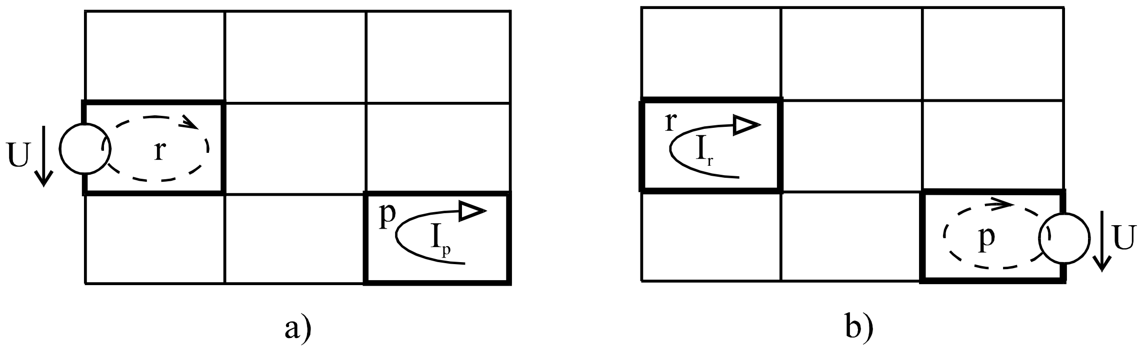
Známe-li napětí U_2, můžeme rezistor R_2 nahradit ideálním napěťovým zdrojem o velikosti napětí U_2 a obvod vzhledem ke svorkám rezistoru R_2 rozdělit na dvě samostatné části. Pro naše účely použijeme pouze část vpravo, viz **Obr. 3.63b**. Opět jsme obdrželi napěťový dělič, pro jehož výstupní napětí můžeme psát

$$U_4 = U_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} = U_0 \frac{R_2 R_4}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad .$$

3.6.4 Princip reciprocity (vzájemnosti)

V předchozích odstavcích jsme poznali, že vodivostní nebo odporové matice obvodu, složeného pouze z pasivních dvojpólů (rezistorů), jsou symetrické podle hlavní diagonály. Totéž platí obecněji pro matice admitanční či impedanční, obsahuje-li obvod pouze pasivní dvojpóly (rezistory, kapacitory, induktory), jak poznáme dále v předmětu *Elektrotechnika 2*. Takové **obvody** jsme také nazývali **reciprocitní**. Princip reciprocity obvodů nyní objasníme podrobněji.

Uvažujme složitý elektrický obvod, jehož graf je naznačen na **Obr. 3.64a**



Obr. 3.64: K vysvětlení principu reciprocity

V *r*-té smyčce působí zdroj napětí *U* a ten způsobí průtok proudu ostatními smyčkami, např. v *p*-té smyčce protéká proud I_p, který vypočítáme jako

$$I_p = U \frac{\Delta_{r:p}}{\Delta} \quad . \tag{3.93}$$

V tomto vztahu Δ je determinant impedanční matice soustavy, $\Delta_{r:p}$ je determinant matice soustavy, ve které jsme vypustili *r*-tý řádek a *p*-tý sloupec a násobili jej činitelem $(-1)^{r+p}$. Protože je impedanční matice symetrická, platí

$$\Delta_{r:p} = \Delta_{p:r} \quad . \tag{3.94}$$

Přemístíme-li tedy zdroj napětí do *p*-té smyčky, jak je naznačeno na **Obr. 3.64b**, zjistíme v *r*-té smyčce stejně veliký proud

$$I_r = U \frac{\Delta_{p:r}}{\Delta} = I_p \quad . \tag{3.95}$$

Uvedený princip můžeme formulovat také vzájemnou ekvivalencí přenosových admitancí G_{rp} a G_{pr}, určených příslušnými zlomky v rovnicích (3.93) a (3.95).

Podobně lze ukázat, že v reciprocitním obvodu se rovnají přenosové impedance (v našem případě odpory) R_{rp} a R_{pr}, kde ve výrazu

$$R_{rp} = \frac{U_p}{I_r} \qquad (3.96)$$

je U_p napětí uzlu *p*, vyvolané proudem I_r ze zdroje připojeného k uzlu *r*, a naopak ve výrazu

$$R_{pr} = \frac{U_r}{I_p} \qquad (3.97)$$

je U_r je napětí uzlu *r*, vyvolané proudem I_p ze zdroje připojeného k uzlu *p*.

Jakmile obvod obsahuje nějaký řízený zdroj nebo operační zesilovač, jeho matice není v obecném případě symetrická a obvod je **nereciprocitní**.

Příklad 3.32:

Uvažujme tranzistorový zesilovací stupeň podle ***Příklad 3.22***. Nalezená vodivostní matice je následujícího tvaru

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.22 & -0.02 & -0.2 \\ 39.98 & 0.52 & -40 \\ -40.2 & 0 & 45.2 \end{bmatrix} \end{array} .$$

Přenosový odpor z uzlu *1* (báze tranzistoru) do uzlu *2* (kolektor tranzistoru) tohoto zesilovače je roven

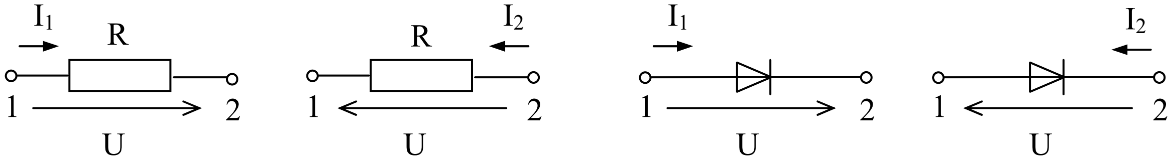
$$R_{12} = \frac{\Delta_{1:2}}{\Delta} = \frac{-199{,}096}{4{,}9720} = -40{,}043 k\Omega ,$$

zatímco přenosový odpor v obráceném směru je

$$R_{21} = \frac{\Delta_{2:1}}{\Delta} = \frac{0{,}9040}{4{,}9720} = 0{,}1818 k\Omega .$$

Rozdíl je způsoben přítomností řízeného zdroje proudu v náhradním schématu tranzistoru podle **Obr. 3.36**. Výpočet potvrzuje, že uvedený obvod není reciprocitní.

Lineární pasivní obvody jsou vždy reciprocitní. Reciprocitní jsou i jejich prvky (dvojpóly). Reciprocitní prvek je takový, který má v obou směrech stejné vlastnosti. Obrátí-li se např. u lineárního rezistoru s odporem *R* polarita přiloženého napětí, viz **Obr. 3.65a**, změní se směr proudu, ale jeho velikost zůstane zachována ($I_1 = I_2 = U/R$). Typickým prvkem nereciprocitním je polovodičová dioda, která je současně i prvkem nelineárním. Stejně veliké napětí vyvolá v propustném směru proud mnohonásobně větší než proud ve směru závěrném ($I_1 >> I_2$), viz **Obr. 3.65b**.



a) b)

Obr. 3.65: Příklad reciprocitního a nereciprocitního prvku

3.6.5 Dualita obvodů

Dva odlišné obvody, z nichž jeden je popsán rovnicemi smyčkových proudů

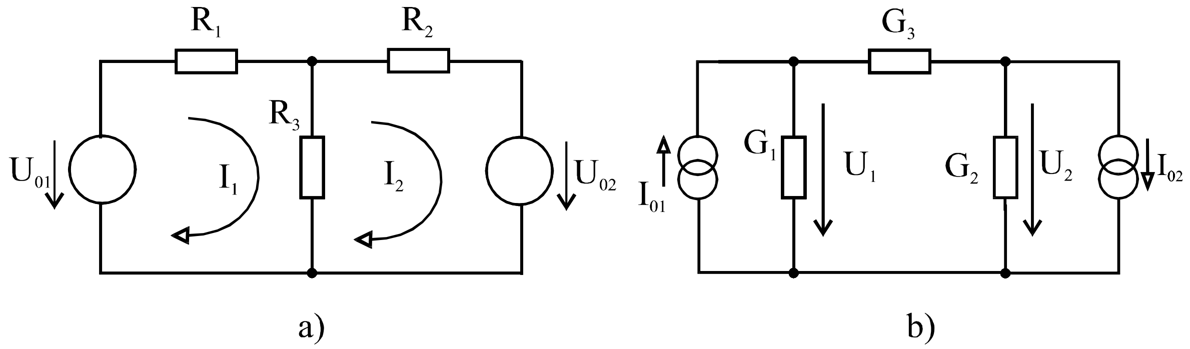
$$\mathbf{R}\mathbf{I_s} = \mathbf{U_z} \qquad (3.98)$$

a druhý rovnicemi uzlových napětí

$$\mathbf{G}\mathbf{U} = \mathbf{I_z} \qquad (3.99)$$

nazýváme duální (z hlediska metody analýzy), jestliže obě soustavy rovnic mají stejný počet neznámých a matice soustav i vektory na pravých stranách mají shodnou strukturu (vodivosti v matici **G** odpovídají odporům v matici **R,** proudy zdrojů ve vektoru $\mathbf{I_z}$ odpovídají napětím zdrojů ve vektoru $\mathbf{U_z}$). Totéž lze říci obecněji i pro případ, jsou-li matice soustav maticemi admitančními a impedančními (admitance v matici **Y** odpovídají impedancím v matici **Z)**, jak poznáme později v předmětu *Elektrotechnika 2*.

Jednoduchý příklad duálních obvodů je nakreslen na **Obr. 3.66**.



Obr. 3.66: Příklad duálních obvodů

Obvod na **Obr. 3.66a** je popsán soustavou rovnic pro smyčkové proudy

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{01} \\ -U_{02} \end{bmatrix} , \qquad (3.100)$$

obvod na **Obr. 3.66b** soustavou rovnic pro uzlová napětí

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{01} \\ -I_{02} \end{bmatrix} . \qquad (3.101)$$

V duálních obvodech si vzájemně odpovídají veličiny a obvodové struktury podle **Tab. 3.1**.

Tab. 3.1: Dualita elektrických obvodů

vodivost	odpor
admitance	impedance
proud	napětí
kapacita	indukčnost

paralelní spojení	sériové spojení
dvojice uzlů	smyčka

Využití poznatků o dualitě obvodů umožňuje mimo jiné ušetřit práci při jejich řešení tím, že analyzujeme pouze jeden z obvodů a výsledky pro duální obvod získáme prostou záměnou veličin, které si vzájemně odpovídají.

Principu duality můžeme využít např. i jako pomůcky pro snazší zapamatování si základních vztahů mezi napětím a proudem u ideálních obvodových prvků. Tak např. pro induktor platí rovnice (2.21), tj.

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \ ,$$

přičemž příslušnou rovnici pro kapacitor můžeme obdržet záměnou pozic napětí a proudu a uvažováním kapacity C namísto indikčnosti L . Obdržíme takto vztah (2.12), tj.

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \ .$$

3.6.6 Millmanova věta

Millmanova věta může být užitečná pro rychlé stanovení napětí mezi určitými dvěma uzly elektrického obvodu, a to při jisté specifické konfiguraci pasivních a aktivních dvojpólů mezi těmito uzly:

– k prvnímu uzlu jsou připojeny jedněmi svorkami jen pasivní dvojpóly charakterizované svými vodivostmi (obecněji admitancemi)
– mezi opačnými svorkami těchto dvojpólů a druhým uzlem musí být známa napětí

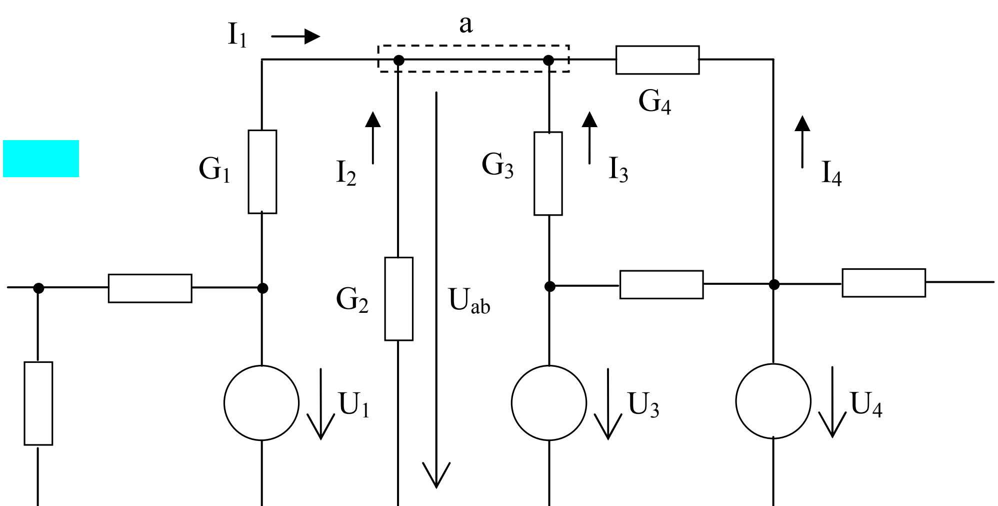
Tato známá napětí mohou být přitom představována nejen napěťovými zdroji zapojenými z důvodu vlastní funkce obvodu, ale také jako náhrady pasivních prvků se známým proudem dle věty o napěťové kompenzaci, viz kap. 3.6.3.

Označíme–li zmiňované dva uzly *a*, *b*, vodivosti pasivních dvojpólů G_i a známá napětí U_i , $i = 1,2,\cdots,n$, platí pro napětí U_{ab} vztah

$$U_{ab} = \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i G_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} \ . \qquad (3.102)$$

Příklad 3.33

Vypočítejte napětí U_{ab} v části elektrického obvodu dle **Obr. 3.67**.



Obr. 3.67: K vysvětlení Millmanovy věty

V obvodu jsou zřejmě splněny podmínky pro aplikaci Millmanovy věty. Rezistory, u nichž nejsou vyznačeny hodnoty vodivostí, nemají na výslednou hodnotu napětí U_{ab} vliv, napětí U_2 (není vyznačeno) je rovno nule. Přímou aplikací vztahu (3.102) dostáváme

$$U_{ab} = \frac{U_1 G_1 + U_3 G_3 + U_4 G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} \; . \qquad (\,3.103)$$

O správnosti výsledku se snadno přesvědčíme aplikací I. Kirchhoffova zákona na uzel a, tj.

$$- I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0 \; . \qquad (\,3.104)$$

Uvážíme-li dále platnost II. Kirchhoffova zákona ve smyčkách, můžeme vyjádřit jednotlivé proudy pomocí napětí U_{ab} jako

$$I_i = (U_i - U_{ab}) G_i \,, \quad i = 1,2,3,4 \; . \qquad (\,3.105)$$

Po dosazení do rovnice (3.104) dostáváme po úpravě hledaný výsledek (3.103). Všimněte si, že podle orientace čítacích šipek napěťových zdrojů mohou být obecně některé členy v čitateli zlomku záporné.

Poznámka:

Jak bylo upozorněno v kap. 3.5.3 v závěru ***Příklad 3.21***, lze použít Millmanovy věty k nalezení výstupního napětí paralelně řazených napěťových zdrojů, viz **Obr. 3.33**. Skutečně je takovéto zapojení pouze speciálním (jednoduchým) případem obecnějších obvodových struktur, které splňují podmínky pro aplikaci Millmanovy věty.

3.6.7 Tellegenův teorém

Tellegenův teorém je matematickou formulací jednoho z obecných fyzikálních principů – **zákona o zachování energie** – v elektrických obvodech. Energie dodaná obvodu aktivními prvky je rovna součtu energie akumulované v obvodu ve formě elektrického a magnetického pole a energie, která se v obvodu mění nevratně na energii jiného druhu.

Lze také použít formulace pomocí okamžitých hodnot výkonů, tj. součet okamžitých hodnot příkonů aktivních prvků se musí rovnat součtu okamžitých hodnot výkonů prvků pasivních. Pro vyjádření okamžitého výkonu je výhodné použít součinu okamžitých hodnot napětí a proudu ve všech větvích obvodu a nerozlišovat již charaktery jednotlivých prvků. Pokud totiž použijeme pro všechny větve shodného systému volby kladných smyslů napětí a proudů, tj. spotřebičového nebo zdrojového, vede to na jednoduchý matematický zápis **Tellegenova teorému** ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{v} u_k i_k = 0 \ , \qquad (3.106)$$

kde v značí počet všech větví obvodu, u_k jsou větvová napětí a i_k větvové proudy.

Platnost Tellegenova teorému není nijak ovlivněna charakterem obvodových prvků, je podmíněna pouze platností Kirchhoffových zákonů. To má také zajímavý teoretický důsledek. Uvažujeme-li totiž další obvod se stejným grafem, ale jinou soustavou napětí u'_k a proudů i'_k, platí nejen rovnice

$$\sum_{k=1}^{v} u'_k i'_k = 0 \ , \qquad (3.107)$$

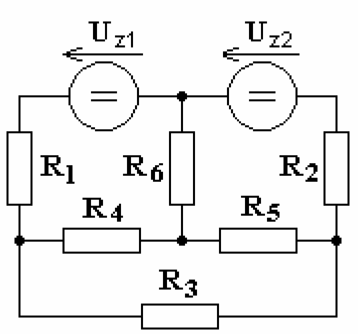
což je přímá analogie k rovnici (3.106), ale také další rovnice

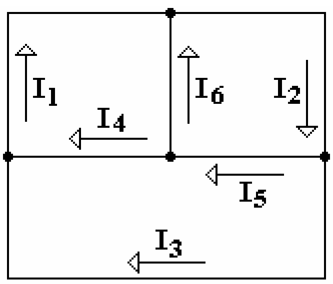
$$\sum_{k=1}^{v} u_k i'_k = 0 \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{v} u'_k i_k = 0 \ . \qquad (3.108)$$

Ačkoliv jsou soustavy napětí a proudů brány vždy z různých (topologicky shodných) obvodů, je pro platnost (3.108) postačující, aby tyto soustavy splňovaly II. a I. Kirchhoffův zákon.

Příklad 3.34

Ověřte platnost Tellegenova teorému pro obvod dle **Obr. 3.68**. Hodnoty prvků obvodu jsou: $U_{z1} = 8$ V, $U_{z2} = 8$ V, $R_1 = 22\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 16\ \Omega$, $R_4 = 15\ \Omega$, $R_5 = 9\ \Omega$, $R_6 = 14\ \Omega$.





a) b)

Obr. 3.68: K ověření Tellegenova teorému

Jak je patrné z grafu na **Obr. 3.68b**, obvod má celkem 6 větví. Řešení můžeme provést např. metodou smyčkových proudů pro 3 nezávislé smyčky obvodu. Jsou-li voleny jako jednoduché s orientací ve směru hodinových ručiček, dostáváme maticovou rovnici

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_4 + R_6 & -R_6 & -R_4 \\ -R_6 & R_2 + R_5 + R_6 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{z1} \\ U_{z2} \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Větvové proudy jsou dány superpozicí proudů smyčkových, po výpočtu pak

$$I_1 = I_{s1} \doteq 0.3956 A,$$
$$I_2 = I_{s2} \doteq 0.5726 A,$$
$$I_3 = I_{s3} \doteq 0.2772 A,$$
$$I_4 = I_{s1} - I_{s3} \doteq 0.1184 A,$$
$$I_5 = I_{s2} - I_{s3} \doteq 0.2954 A,$$
$$I_6 = I_{s2} - I_{s1} \doteq 0.1770 A.$$

Zvolíme-li spotřebičový systém čítacích šipek, dostáváme pro větvová napětí rovnice

$$U_1 = R_1 I_1 - U_{z1} = 0.7024 V,$$
$$U_2 = R_2 I_2 - U_{z2} = -5.1371 V,$$
$$U_3 = R_3 I_3 = 4.4347 V,$$
$$U_4 = R_4 I_4 = 1.7759 V,$$
$$U_5 = R_5 I_5 = 2.6588 V,$$
$$U_6 = R_6 I_6 = 2.4783 V.$$

Podle rovnice (3.106) musí platit

$$\sum_{k=1}^{6} U_k I_k = 0 ,$$

což je v rámci chyb zaokrouhlování mezivýsledků skutečně splněno.

Předchozí rovnici lze také upravit na tvar

$$U_{z1} I_1 + U_{z2} I_2 = \sum_{k=1}^{6} R_k I_k^2 ,$$

ze které je více patrná formulace Tellegenova teorému skrze rovnost příkonů aktivních prvků obvodu (zde dvou nezávislých zdrojů napětí) a výkonů dodávaných do prvků pasivních (zde šesti rezistorů). Po dosazení opět dostáváme potvrzení Tellegenova teorému, neboť

$$U_{z1} I_1 + U_{z2} I_2 \doteq 7.7452 W \quad \text{a}$$

$$\sum_{k=1}^{6} R_k I_k^2 \doteq 7.7452 W .$$

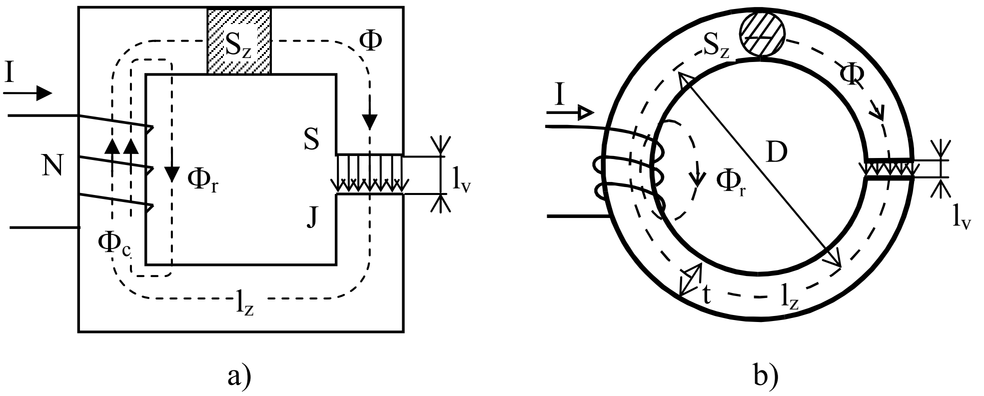
4 Magnetické obvody

4.1 Základní pojmy. Jednoduchý magnetický obvod.

Se základními veličinami a zákony magnetického pole jsme se seznámili v kap. 1.2 těchto skript. **Magnetické obvody** jsou určeny k soustředění magnetického pole do určitého pracovního prostoru za účelem jeho technického využití. Tak např. na silovém působení magnetického pole na vodiče s proudem je založena funkce elektromotorů, v nichž se elektrická energie mění v mechanickou. V generátorech se naopak mění energie mechanická v elektrickou tak, že se ve vodiči pohybujícím se v magnetickém poli indukuje napětí.

V transformátorech je zase využito indukce napětí časově proměnným magnetickým polem. Na vzájemném působení magnetického pole a vodičů s proudy je založena činnost řady dalších zařízení, jako např. elektrických přístrojů (jističů, stykačů, ...), elektrických měřicích přístrojů, elektroakustických měničů (reproduktorů, sluchátek, mikrofonů, záznamových a čtecích hlav, ...) atd.

Abychom dosáhli optimálního účinku, snažíme se koncentrovat magnetické pole do vhodně tvarovaného **pracovního prostoru**. Pole vytvoříme v okolí vodičů protékaných proudem, obvykle cívkou s určitým počtem závitů, a magneticky dobře vodivými drahami (tzv. pólovými nástavci) je vedeme do pracovního prostoru (vzduchová mezera). Celek se pak nazývá **magnetický obvod.** Na **Obr. 4.1** jsou nakreslena jednoduchá provedení magnetických obvodů.



Obr. 4.1**:** Jednoduché magnetické obvody

Základem je jádro pravoúhlého tvaru (**Obr.** 4.1**a**) či ve tvaru toroidu (**Obr.** 4.1**b**) vyrobené z magneticky dobře vodivého materiálu, tj. materiálu s vysokou magnetickou permeabilitou. Takovýmto materiálům se říká **feromagnetické**. Jádro je přerušeno relativně malou mezerou, která představuje budoucí pracovní prostor, ve kterém se mají projevovat požadované silové účinky. Jádrem včetně vzduchové mezery protéká **hlavní magnetický tok** Φ. Jelikož materiál jádra není dokonale magneticky vodivý, menší část celkového magnetického toku Φ_c buzeného proudem I se uzavírá kratší cestou v nejbližším okolí závitů cívky. Tomuto toku, který se obvykle snažíme co nejvíce potlačit, se říká **rozptylový tok** Φ_r. Zřejmě platí rovnice

$$\Phi = \Phi_c - \Phi_r = \tau\Phi_c = (1-\sigma)\Phi_c \ , \qquad (4.1)$$

kde

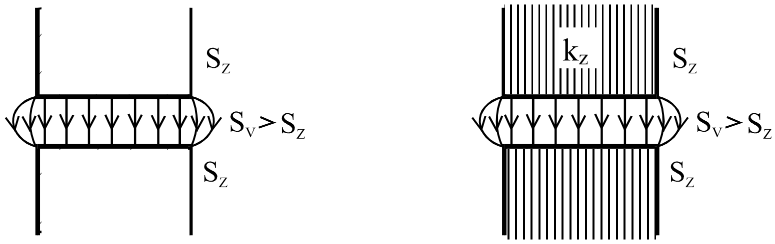
$$\tau = \frac{\Phi}{\Phi_c} \qquad \text{a} \qquad \sigma = \frac{\Phi_r}{\Phi_c} \qquad (4.2)$$

jsou **činitelé rozptylu**.

U magnetického obvodu s jádrem pravoúhlého tvaru dochází k rozptylu také v jeho rozích. Magnetický obvod ve tvaru toroidu má zvláštní význam v tom, že zde lze dosáhnout rozptylu prakticky nulového ($\tau \approx 1$, $\sigma \approx 0$). Pokud je totiž vinutí cívky jednovrstvé, z tenkého drátu a se závity těsně vedle sebe, magnetické pole nemůže vybočovat vně jádra. Je-li navíc střední průměr toroidu mnohem větší než jeho tloušťka ($D >> t$), je rozdíl v délkách indukčních čar zanedbatelný a magnetické pole uvnitř toroidu lze považovat za homogenní. Magnetická indukce $\vec{\mathbf{B}}$ je pak považována za shodnou co do velikosti ve všech bodech příčného průřezu S_z a kolmou k jeho rovině. Proto můžeme psát

$$\Phi = BS_z \ . \qquad (4.3)$$

Předpokládáme, že magnetický tok v jádře je roven magnetickému toku ve vzduchové mezeře, neboť z hlediska jeho průtoku jsou obě části magnetického obvodu řazeny za sebou (sériově). Vzhledem k rozdílné magnetické vodivosti materiálu jádra a vzduchové mezery je **efektivní průřez** vzduchové mezery S_v větší než průřez jádra S_z. Je to jasně patrné z průběhu indukčních čar v okolí vzduchové mezery, jak je vidět z detailního nákresu na **Obr. 4.2a**.



a) b)

Obr. 4.2: Rozptyl magnetického toku ve vzduchové mezeře

Je-li však délka vzduchové mezery l_v mnohem menší než příčné rozměry průřezu jádra, často se rozptyl v praxi zanedbává a volí se $S_v \approx S_z$. Jiná situace nastává, není-li jádro vyrobeno jako monolit, ale je složeno ze vzájemně izolovaných transformátorových plechů (což se provádí kvůli zmenšení ztrát tzv. vířivými proudy při střídavém magnetování), viz **Obr. 4.2b**. Zde je průřez čistého železa menší než průřez vzduchové mezery i při zanedbání okrajového efektu a platí

$$S_z = k_z S_v < S_v \ , \tag{4.4}$$

kde k_z je **činitel plnění** (obvykle se pohybuje v rozmezí 0.87 až 0.95).

Magnetomotorické napětí $F_m = NI$ vytvořené proudem I v cívce s N závity musí být v rovnováze se součtem všech úbytků magnetických napětí vyvolaných průchodem toku Φ. Zanedbáme-li rozptylový tok Φ_r, pak platí

$$F_m = U_{mz} + U_{mv} = H_z l_z + H_v l_v = \frac{B_z}{\mu_z} l_z + \frac{B_v}{\mu_v} l_v \ , \tag{4.5}$$

kde l_z je délka **střední indukční čáry** v jádře (na **Obr.** 4.1 vyznačena čárkovaně). Magnetické permeability jsou

$$\mu_v \doteq \mu_0, \ \mu_z = \mu_{rz} . \mu_0 \ , \tag{4.6}$$

velikosti magnetických indukcí v jednotlivých částech obvodu pak

$$B_v = \frac{\Phi}{S_v}, \ B_z = \frac{\Phi}{S_z} \ . \tag{4.7}$$

Podle (4.5) proto platí

$$U_{mv} = \frac{\Phi}{\mu_0 S_v} l_v = R_{mv} \Phi \ , \tag{4.8}$$

a podobně

$$U_{mz} = \frac{\Phi}{\mu_z S_z} l_z = R_{mz} \Phi \ . \tag{4.9}$$

Ve vztahu (4.8) je R_{mv} **magnetický odpor (reluktance)** vzduchové mezery

$$R_{mv} = \frac{l_v}{\mu_0 S_v} \quad , \tag{4.10}$$

a podobně ve vztahu (4.9) je R_{mz} magnetický odpor feromagnetické části obvodu

$$R_{mz} = \frac{l_z}{\mu_z S_z} \quad . \tag{4.11}$$

Dosazením (4.8) a (4.9) do rovnice (4.5) nakonec dostáváme

$$F_m = R_m \Phi \quad , \tag{4.12}$$

kde R_m je celkový magnetický odpor magnetického obvodu

$$R_m = R_{mz} + R_{mv} \quad . \tag{4.13}$$

Rovnice (4.12) je vyjádřením tzv. **Hopkinsonova zákona**, který je obdobou Ohmova zákona z elektrických obvodů. Z rovnice vyplývá užívaná jednotka pro magnetický odpor $[A \cdot Wb^{-1}]$. Z výše uvedeného odvození je ovšem patrné, že Hopkinsonův zákon platí také pro jednotlivé části magnetického obvodu. Proto pro úbytek magnetického napětí U_m na určité části magnetického obvodu o magnetickém odporu R_m můžeme obecně psát

$$U_m = R_m \Phi \quad . \tag{4.14}$$

Za předpokladu, že je v části magnetického obvodu o průřezu S, délce l a magnetické permeabilitě μ homogenní magnetické pole, platí pro jeho magnetický odpor (srov. rovnice (4.10) a (4.11))

$$R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S} = \nu \frac{l}{S} \quad . \tag{4.15}$$

Veličina $\nu = 1/\mu$ je **měrný magnetický odpor** (**reluktivita**), v praxi se však častěji používá přímo převrácené hodnoty permeability. Z poslední rovnice vychází pro magnetický odpor jednotka $[H^{-1}]$, se kterou se lze také v některé literatuře setkat.

Převrácená hodnota magnetického odporu je **magnetická vodivost** (**permeance**)

$$G_m = \frac{1}{R_m} = \mu \frac{S}{l} \quad . \tag{4.16}$$

Z rovnice vyplývá i používaná jednotka $[H]$. Dále je patrné, že magnetická **permeabilita** má fyzikální význam **měrné magnetické vodivosti.** Hopkinsonův zákon lze tedy vyjádřit také ve tvarech

$$\Phi = G_m F_m \qquad \text{či} \qquad \Phi = G_m U_m \quad . \tag{4.17}$$

Magnetomotorické napětí je příčinou magnetického toku v magnetickém obvodu, podobně jako elektromotorické napětí je příčiou elektrického proudu v obvodu elektrickém. Mezi magnetickými a elektrickými obvody a jejich veličinami i vzájemnými vztahy proto existuje určitá **formální analogie**, jak je souhrnně uvedeno v **Tab. 4.1**.

Tab. 4.1: Formální analogie mezi elektrickými a magnetickými obvody

ELEKTRICKÝ OBVOD	MAGNETICKÝ OBVOD
elektrický proud $I\,[A]$	magnetický tok $\Phi\,[Wb]$

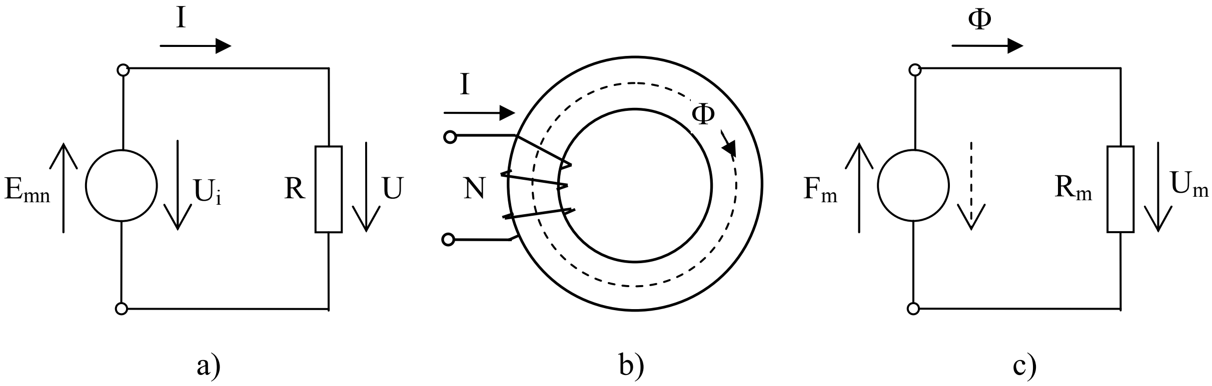
elektrické napětí $U\,[V]$	magnetické napětí $U_m\,[A]$
elektromotorické napětí $E_{mn}\,[V]$	magnetomotorické napětí $F_m\,[A]$
elektrický odpor $R\,[\Omega]$	magnetický odpor $R_m\,[A \cdot Wb^{-1}]$
Ohmův zákon $U = RI$	Hopkinsonův zákon $U_m = R_m \Phi$

Analogii lze dále rozšířit i na oba **Kirchhoffovy zákony**. V magnetických obvodech pak platí

– v místech, kde se větví magnetický tok $\sum \Phi = 0$,

– v uzavřené smyčce magnetického obvodu $\sum U_m = 0$.

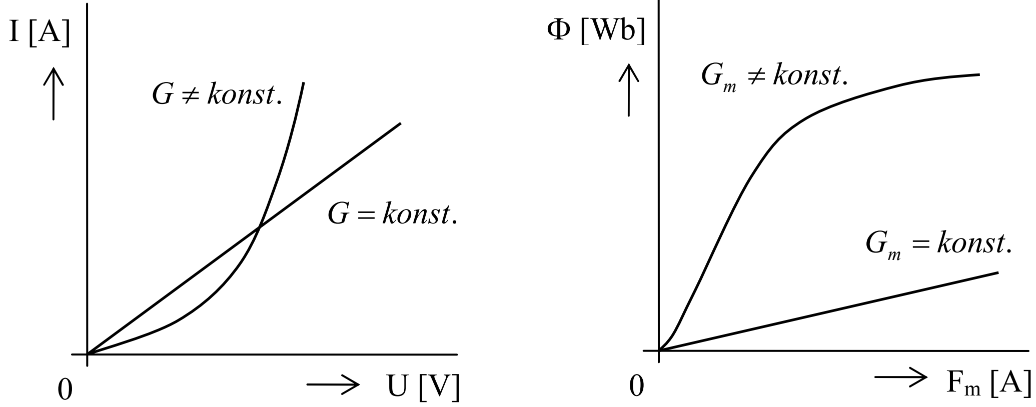
Schématicky jsou některé analogie zachyceny pro případ elementárních obvodů na **Obr. 4.3**.



Obr. 4.3: Analogie mezi elektrickým a magnetickým obvodem

Na **Obr. 4.3a** je schéma elementárního elektrického obvodu, na **Obr. 4.3b** je elementární magnetický obvod, jeho elektrické náhradní schéma je pak na **Obr. 4.3c**. Zatímco v teorii elektrických obvodů je zažito užívání vnitřního napětí U_i namísto elektromotorického napětí E_{mn} (napětí jsou stejná co do velikosti, liší se jen orientací čítacích šipek), v případě obvodů magnetických se užívá právě magnetomotorické napětí F_m, včetně uvedeného směru čítací šipky. Přestože se pojmu „vnitřní magnetické napětí" neužívá, má-li být použitelný zavedený formalismus při aplikaci II. Kirchhoffova zákona i pro části magnetického obvodu s cívkami protékanými proudy, je třeba uvažovat směr čítací šipky pro účely výpočtu jako opačný (tzn. uvažovat magnetické napětí, na **Obr. 4.3c** vyznačeno čárkovaně).

Příslušné analogie můžeme nalézt také mezi charakteristikami vycházejícími z Ohmova a Hopkinsonova zákona. Grafickým zobrazením Ohmova zákona $I = GU$ je ampérvoltová charakteristika, viz **Obr. 4.4a** . Pro lineární rezistor je to přímka. U rezistoru nelineárního je závislost proudu na napětí obecnou funkcí $I = f(U)$, A–V charakteristika je pak odpovídající křivkou, podrobněji v kap. 2.2.1. Grafickým zobrazením Hopkinsonova zákona $\Phi = G_m F_m$ je **magnetizační charakteristika** magnetického obvodu, viz **Obr. 4.4b**.



a) b)

Obr. 4.4: Analogie charakteristik elektrického a magnetického obvodu

Pro lineární magnetikum (např. vzduch) se jedná o přímku. Avšak u magneticky dobře vodivých materiálů (např. železa), které se pro magnetické obvody užívají, není permeabilita (a proto ani magnetická vodivost) konstantou, ale je závislá na velikosti magnetické indukce. Magnetizační charakteristika $\Phi = f(F_m)$ má pak typický výrazně nelineární průběh, který pro velké hodnoty magnetomotorického napětí vykazuje tzv. **stav nasycení**.

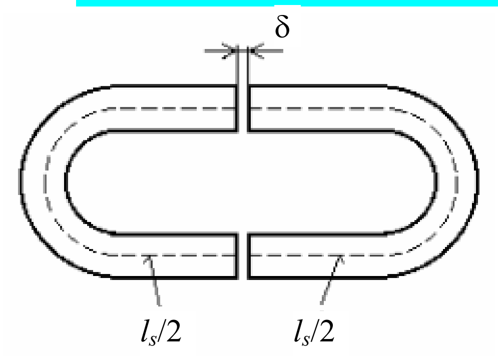
Fyzikálně je analogie mezi elektrickými a magnetickými obvody důsledkem analogie mezi stacionárním proudovým polem (tj. elektrickým polem ustáleného stejnosměrného proudu ve vodivém prostředí) a stacionárním magnetickým polem (tj. magnetickým polem buzeným vodiči s ustáleným stejnosměrným proudem nebo permanentními magnety). V elektrickém a magnetickém obvodu je příslušné proudové (elektrické) nebo magnetické pole prostorově ohraničeno. U elektrických obvodů je toto ohraničení velmi výrazné, neboť rozdíl v měrné vodivosti kovových vodičů (měď, hliník, …) a izolantů (vzduch, keramika, …) je v řádu 10^{12} i více. U magnetických obvodů tomu tak není, neboť zde je rozdíl mezi permeabilitou magneticky dobře vodivého materiálu (železo, ferit, …) a okolního prostředí (vzduch, izolace vodičů, …) v řádech jen asi 10^3 až 10^5. Proto je u magnetických obvodů vždy nutno pečlivě uvážit, kdy a za jakých předpokladů lze zanedbat rozptylový magnetický tok, abychom se nedopustili nepřípustně velkých chyb. Naproti tomu uvažování rozptylového magnetického toku vede zpravidla ke značným výpočetním obtížím z důvodu jeho nesnadné kvantifikace. Kromě toho je zanedbáno reálně více či méně nerovnoměrné rozložení toku na příčném řezu magnetického obvodu (závisí na tvaru jádra) a u magneticky měkkých materiálů se běžně nepřihlíží ani k existenci jevu hystereze. Z uvedených důvodů jsou výsledky řešení magnetických obvodů zatíženy mnohem většími chybami, než tomu je u obvodů elektrických.

Příklad 4.1

Dvě magnetická jádra tvaru **U** jsou od sebe oddělena vzduchovou mezerou δ=0.4*mm*, viz **Obr. 4.5**. Střední indukční čára ve feromagnetickém materiálu má délku l_s=80*mm*, průřez magnetického obvodu je po délce konstantní S=25mm^2, relativní permeabilita μ_r=200. Určete magnetický odpor obvodu a jeho změnu při změně vzduchové mezery o ±50%.

Celkový magnetický odpor je roven součtu magnetických odporů jádra a vzduchové mezery. Dostáváme proto

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\frac{l_s}{S} + \frac{1}{\mu_0}\frac{2\delta}{S} = \frac{1}{\mu_0 S}\left(\frac{l_s}{\mu_r} + 2\delta\right) \doteq 3.82 \cdot 10^7 \, A \cdot Wb^{-1}.$$



Obr. 4.5: K výpočtu magnetického odporu jádra

Pro zadané změny délky vzduchové mezery pak můžeme psát

– změna +50% $\Rightarrow \quad R'_m = \dfrac{1}{\mu_0 S}\left(\dfrac{l_s}{\mu_r} + 3\delta\right) = 5.1 \cdot 10^7\, A \cdot Wb^{-1}$,

– změna -50% $\Rightarrow \quad R''_m = \dfrac{1}{\mu_0 S}\left(\dfrac{l_s}{\mu_r} + \delta\right) = 2.5 \cdot 10^7\, A \cdot Wb^{-1}$.

Magnetický odpor R_m se při změně délky vzduchové mezery o ±50% změní asi o ±33%. Velikost vzduchové mezery má tedy rozhodující vliv na velikost magnetického odporu celého obvodu (feromagnetické jádro je dobře magneticky vodivé, μ_r>>1, a tedy jen málo přispívá k výslednému magnetickému odporu).

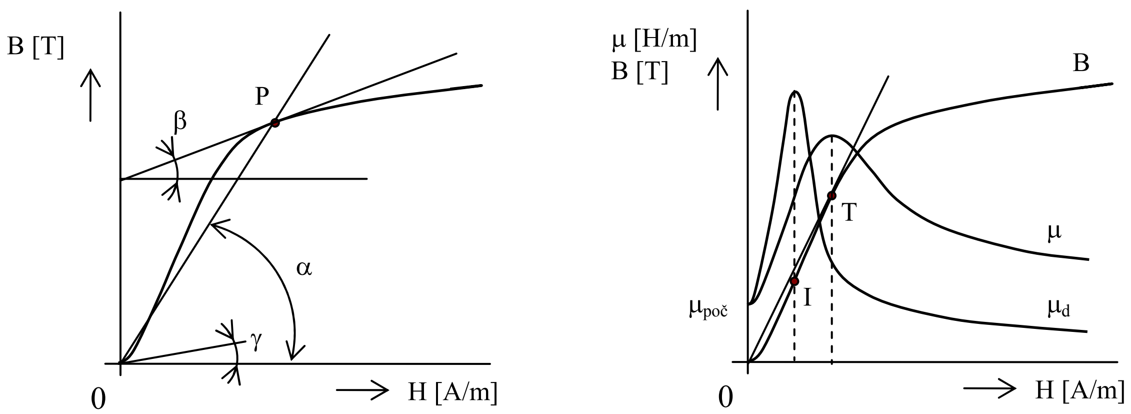
4.2 Magnetické vlastnosti látek

Podle chování materiálů v magnetickém poli, které závisí na velikosti jejich relativní permeability, je rozdělujeme na:

diamagnetické – $\mu_r < 1$ (málo odlišná od jedničky),
paramagnetické – $\mu_r > 1$ (řádově v jednotkách),
feromagnetické – $\mu_r >> 1$ (řádově i v tisících).

Diamagnetické i paramagnetické látky jsou lineární, jejich permeabilita nezávisí na intenzitě magnetického pole. Pro použití v magnetických obvodech pak mají největší význam látky **feromagnetické**. Jedná se o látky s vysokou magnetickou vodivostí, jimiž se dá dosáhnout silného magnetického pole v pracovní oblasti za pomoci malého budicího proudu. Feromagnetika jsou však nelineární a nemohou být proto charakterizovány jediným parametrem. Jejich permeabilita je závislá na magnetické indukci, tuto závislost však nelze udat analyticky. Vlastnosti feromagnetických látek se proto udávají experimentálně určenou **magnetizační křivkou**, viz **Obr. 4.6**.

Je to závislost magnetické indukce na intenzitě magnetického pole $B = f(H)$. Magnetizační křivka má svůj typický průběh: po mírném ohybu v počátku přechází do strmé zhruba lineární části, při větších hodnotách magnetické indukce se čára ohýbá a v oblasti nasycení má opět přibližně přímkový průběh. Je zřejmé, že v každém bodě magnetizační čáry bude vykazovat feromagnetikum různou velikost permeability.



a) b)

Obr. 4.6: Magnetizační křivka a závislosti permeability feromagnetika

Na **Obr. 4.6a** je vyznačen pracovní bod *P*, pro který je možné definovat dva druhy permeability, **statickou** jako prostý poměr

$$\mu = \frac{B}{H} \sim \mathrm{tg}\alpha \ , \qquad (4.18)$$

a **dynamickou** jako derivaci

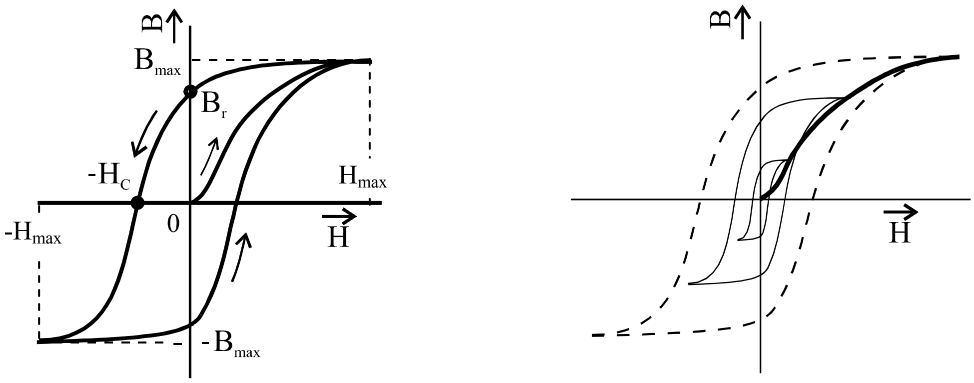
$$\mu_d = \frac{dB}{dH} \sim \mathrm{tg}\beta \ . \qquad (4.19)$$

Geometrický význam je z **Obr. 4.6a** zřejmý. Budeme-li pracovní bod *P* posouvat směrem k počátku, dostaneme jako limitní případ tzv. **počáteční** permeabilitu

$$\mu_{poč} = \lim_{H \to 0} \frac{B}{H} = \left. \frac{dB}{dH} \right|_{H=0} \sim \mathrm{tg}\gamma \ . \qquad (4.20)$$

V počátku jsou si tedy obě permeability – statická i dynamická – rovny. Na **Obr. 4.6b** jsou vyneseny spolu s magnetizační křivkou v jednom grafu. Z obrázku je zřejmé, že statická permeabilita dosahuje svého maxima v tečném bodě *T* polopřímky vedené z počátku a závislosti $B = f(H)$, zatímco dynamická permeabilita má své maximum v inflexním bodě *I* této závislosti. Maximum dynamické permeability nastává při menších hodnotách intenzity magnetického pole a nabývá také větších hodnot než je tomu u permeability statické.

Prakticky je magnetizační křivka buď tzv. **křivka prvotní magnetizace**, viz **Obr. 4.7a**, nebo tzv. **komutační křivka**, viz **Obr. 4.7b**.



a) b)

Obr. 4.7: Hysterezní smyčka, křivka prvotní magnetizace a komutační křivka

Ve skutečnosti totiž není celková závislost magnetické indukce *B* na intenzitě magnetického pole *H* u feromagnetických materiálů jednoznačnou funkcí. To znamená, že jedné hodnotě *H* mohou odpovídat dvě i více hodnot *B*, a to v závislosti na předchozím průběhu magnetování (tj. na jeho historii). Tato celková závislost $B = f(H)$ se nazývá **hysterezní smyčka,** jejíž příklad je na **Obr. 4.7** uveden.

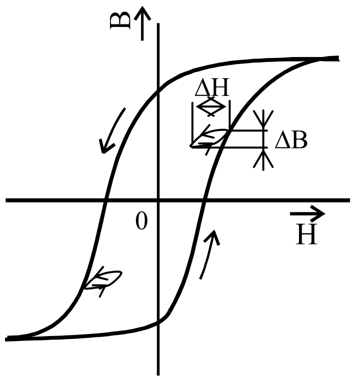
Začneme-li magnetovat dokonale odmagnetovaný feromagnetický materiál, viz **Obr. 4.7a**, pohybuje se pracovní bod od počátku souřadnic po **křivce prvotní magnetizace** až do bodu (H_{max}, B_{max}). Při poklesu intenzity magnetického pole neprobíhá změna indukce po stejné křivce jako při jejím nárůstu, pracovní bod se pohybuje po horní větvi hysterezní smyčky. Při nulové hodnotě H skončí v bodě B_r, což je jeden z význačných bodů na hysterezní smyčce, tzv. **remanentní** (zbytková) **magnetická indukce**. Poté obrátíme směr intenzity na opačný (prakticky změnou směru proudu v cívce, kterou toto pole vytváříme). Pracovní bod se pohybuje k maximálním záporným hodnotám do bodu ($-H_{max}$, $-B_{max}$), přičemž při nulové hodnotě B projde druhým význačným bodem $-H_c$. Veličina H_c je tzv. **koercivita**, což je velikost intenzity magnetického pole, která je nezbytná k odmagnetování materiálu po jeho předchozím zmagnetování (tj. ke snížení magnetické indukce na nulu). Intenzita H se pak dále mění od maximálních záporných do maximálních kladných hodnot. Je-li uvedený cyklus několikrát opakován (zhruba 10 krát), dosáhne se stavu, kdy hysterezní smyčka je souměrná podle počátku. (Pozn.: Uvedené změny musí probíhat relativně malou rychlostí, jinak by se uplatnily ztráty vířivými proudy, které by způsobily rozšíření a deformaci tvaru hysterezní smyčky). Změníme-li rozkmit magnetizačního proudu a tím i maximální velikost intenzity H_{max}, dostaneme vždy jinou hysterezní smyčku, jak je tomu v příkladu na **Obr. 4.7b**. Křivka, která prochází vrcholy těchto jednotlivých smyček (na obrázku zakreslena silnou čarou), se nazývá **křivkou komutační**. Je velmi podobná křivce prvotní magnetizace a v praxi jsou také často zaměňovány.

Při malých změnách intenzity magnetického pole ΔH podle **Obr. 4.8** se také indukce mění v intervalu ΔB podle malých, tzv. **elementárních hysterezních smyček**. Pro vyjádření takového dynamického chování definujeme tzv. **inkrementální** (přírůstkovou) **permeabilitu**

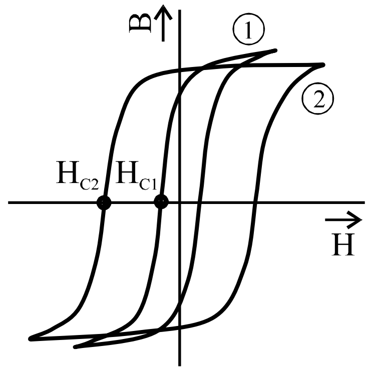
$$\mu_i = \frac{\Delta B}{\Delta H} , \qquad (4.21)$$

která se v limitě stává tzv. **vratnou permeabilitou**

$$\mu_v = \lim_{\Delta H \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta H} . \qquad (4.22)$$



Obr. 4.8: K inkrementální permeabilitě



Obr. 4.9: Magneticky měkký a tvrdý materiál

Plocha hysterezní smyčky je úměrná energii potřebné na přemagnetování jednotkového objemu materiálu, tj. **hustotě energie**

$$A_h = \oint H dB , \qquad (4.23)$$

s jednotkou $[Jm^{-3}]$. Při jednom cyklu přemagnetování materiálu o objemu V je třeba energie

$$A_{hV} = A_h V . \qquad (4.24)$$

Pokud je přemagnetování realizováno střídavým zdrojem s frekvencí f, resp. periodou T, (o střídavých proudech dále v kap. 5), výkon ztracený za dobu jedné periody je roven

$$P_h = \frac{A_{hV}}{T} = fA_{hV} \quad . \qquad (4.25)$$

Jedná se o tzv. **hysterezní ztráty**, které způsobují zahřívání jádra cívky, kterou je toto pole vytvářeno. Proto se pro magnetické obvody strojů a přístrojů, které pracují na střídavý proud, užívá **magneticky měkkých** materiálů s úzkou hysterezní smyčkou, viz **Obr.** 4.9 (smyčka 1). Naopak pro výrobu permanentních magnetů se užívají **magneticky tvrdé** materiály se širokou hysterezní smyčkou, které vykazují velkou remanentní indukci i koercivitu, viz **Obr.** 4.9 (smyčka 2). Magneticky tvrdý materiál vyžaduje mnohem větší intenzitu magnetického pole pro své odmagnetování ($H_{c2} > H_{c1}$).

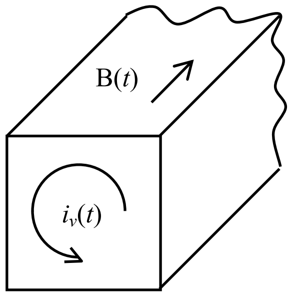
Pro úplnost dodejme, že při **střídavém magnetování** vznikají dále v materiálu přídavné ztráty, tzv. **vířivými proudy**. V důsledku platnosti Faradayova indukčního zákona se totiž v materiálu jádra indukuje oběhové napětí

$$u_0 = -\frac{d\Phi}{dt} = -S\frac{dB}{dt} \quad , \qquad (4.26)$$

které na uzavřené dráze s určitým odporem R dává vzniknout vířivému proudu

$$i_v = \frac{u_0}{R} = -\frac{S}{R}\frac{dB}{dt} \quad , \qquad (4.27)$$

jak je schematicky znázorněno na **Obr. 4.10**. Podle Lenzova zákona je tento proud takového směru, aby svým vlastním magnetickým polem působil proti příčině svého vzniku. Důsledek je nerovnoměrné rozložení magnetického pole v průřezu jádra (pole je vytlačováno k jeho povrchu) a již zmíněné přídavné ztráty, které materiál jádra zahřívají. Zmenšování ztrát se provádí především zvyšováním elektrického odporu jádra. To lze učinit např. jeho složením z elektricky odizolovaných plechů a také přidáním křemíku do jejich materiálu. Zvláště pak pro vysoké frekvence se používají **ferity**, což jsou elektricky odizolované feromagnetické částice slisované do potřebného tvaru.

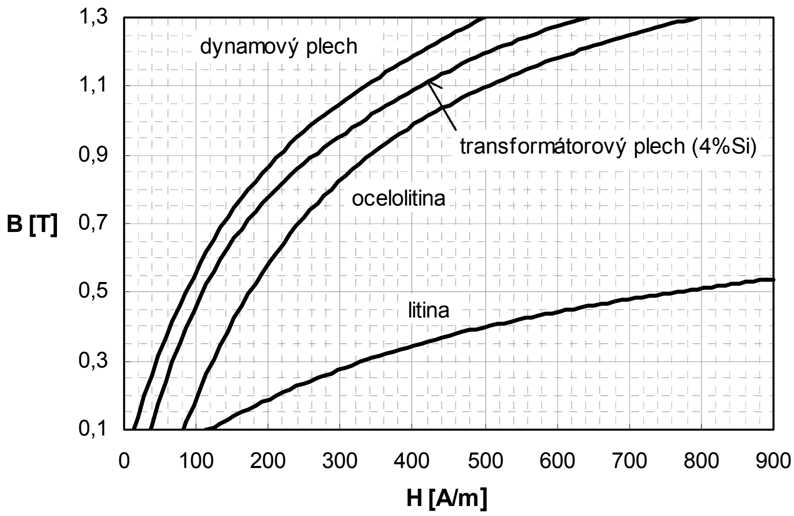


Obr. 4.10: Ke vzniku vířivých proudů

4.3 Řešení magnetických obvodů

Cílem řešení magnetických obvodů je **analýza** nebo **syntéza** obvodu. Při **analýze** vycházíme z kompletně zadaného obvodu a hledáme velikosti magnetických toků a úbytků magnetických napětí v jeho jednotlivých částech (větvích). Častěji však provádíme **syntézu**, kdy navrhujeme magnetický obvod tak, abychom v dané pracovní oblasti (vzduchové mezeře) zabezpečili požadovanou velikost magnetické indukce. Předpokládáme přitom určitý tvar a materiál magnetického obvodu a hledáme potřebnou velikost magnetomotorického napětí $F_m = NI$ (potřebný počet "ampérzávitů" budicí cívky).

Postup řešení připomíná řešení nelineárních rezistorových (nesetrvačných) elektrických obvodů. Jak bylo již jednou poznamenáno, v případě magnetických obvodů je situace dále komplikována hysterezí feromagnetických materiálů, existencí nenulových rozptylových toků a nerovnoměrným rozložením toku na příčném řezu magnetického obvodu. Proto je řešení magnetických obvodů pouze přibližné. U magneticky měkkých materiálů s úzkou hysterezní smyčkou se jako magnetizační křivky používá **komutační křivka** (**Obr. 4.7**). Při takovém zanedbání hystereze také ztrácejí význam pojmy inkrementální a vratné permeability, které splynou s permeabilitou dynamickou. Protože se komutační křivka magneticky měkkých materiálů jen nepatrně odlišuje od křivky prvotní magnetizace, v technických aplikacích se tyto křivky zpravidla nerozlišují a jsou považovány za jedinou **magnetizační křivku**, kterou je daný materiál charakterizován. Na **Obr. 4.11** jsou uvedeny některé typické magnetizační křivky $B = f(H)$ v praxi používaných materiálů.



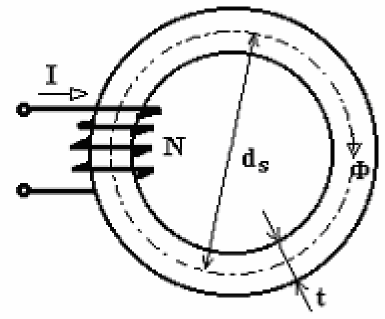
Obr. 4.11: Magnetizační křivky technických materiálů

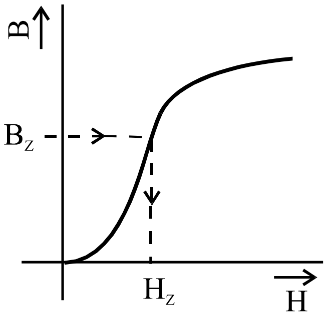
Postup řešení ukážeme na jednoduchých příkladech.

Příklad 4.2

Na ocelovém prstenci průřezu S=600mm^2 je vinutí o N=200 závitech, viz **Obr. 4.12a**. Střední průměr prstence je d_s=220mm. Jak velký proud I musí vinutím procházet a jaký je magnetický odpor jádra R_m, je-li magnetický tok Φ=0.6mWb?

Při řešení předpokládáme $d_s >> t$, kdy lze považovat magnetické pole v prstenci přibližně za homogenní. Pak můžeme psát $B_z = \Phi / S = 1T$ a z magnetizační křivky příslušného materiálu odečíst hodnotu intenzity $H_z \doteq 215 A \cdot m^{-1}$, jak je schematicky ukázáno na **Obr. 4.12b**.





a) b)

Obr. 4.12: Ocelový prstenec a magnetizační křivka

Postupně můžeme psát

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I \quad \Rightarrow \quad Hl_s = NI \quad \Rightarrow \quad I = \frac{Hl_s}{N} = \frac{H\pi d_s}{N} \doteq 0.74A \ .$$

Magnetický odpor lze vypočítat z Hopkinsonova zákona

$$R_m = \frac{F_m}{\Phi} = \frac{NI}{\Phi} \doteq 2.47\cdot 10^5\, A\cdot Wb^{-1}$$

nebo ze vztahu

$$R_m = \frac{1}{\mu}\frac{l_s}{S} \ , \qquad \text{kde} \qquad \mu = \frac{B}{H} = \frac{1}{215} \doteq 4.65\cdot 10^{-3}\, H\cdot m^{-1} \ .$$

Příklad 4.3

Uvažujme toroidní magnetický obvod se železným jádrem a vzduchovou mezerou podle **Obr. 4.1b**. Známe rozměry pracovního prostoru l_v a S_v, ve kterém požadujeme indukci B_v. Hledáme potřebné magnetomotorické napětí budicí cívky F_m.

Magnetický tok $\Phi = B_v S_v$, Hopkinsonův zákon dává magnetické napětí vzduchové mezery

$$U_{mv} = \Phi R_{mv} = \Phi \frac{l_v}{\mu_0 S_v} \ .$$

Protože je toroidní jádro vyrobeno z feromagnetického materiálu, nemůžeme zde pro určení úbytku magnetického napětí U_{mz} Hopkinsonův zákon použít (neznáme totiž permeabilitu a proto ani magnetický odpor R_{mz} pro daný pracovní bod). Můžeme ale vypočítat magnetickou indukci v jádře

$$B_z = \frac{\Phi}{S_z} = B_v \frac{S_v}{S_z}$$

(části obvodu jsou řazeny do série a magnetický tok je stejné velikosti) a použít magnetizační křivku materiálu $B_z = f(H_z)$. Z ní odečteme hodnotu intenzity magnetického pole H_z, jak je zřejmé opět z **Obr. 4.12b**, a úbytek magnetického napětí určíme v souladu s (4.5) jako

$$U_{mz} = H_z l_z \ ,$$

kde $l_z = \pi D - l_v$ je délka střední indukční čáry v železném jádře, viz **Obr. 4.1b**.

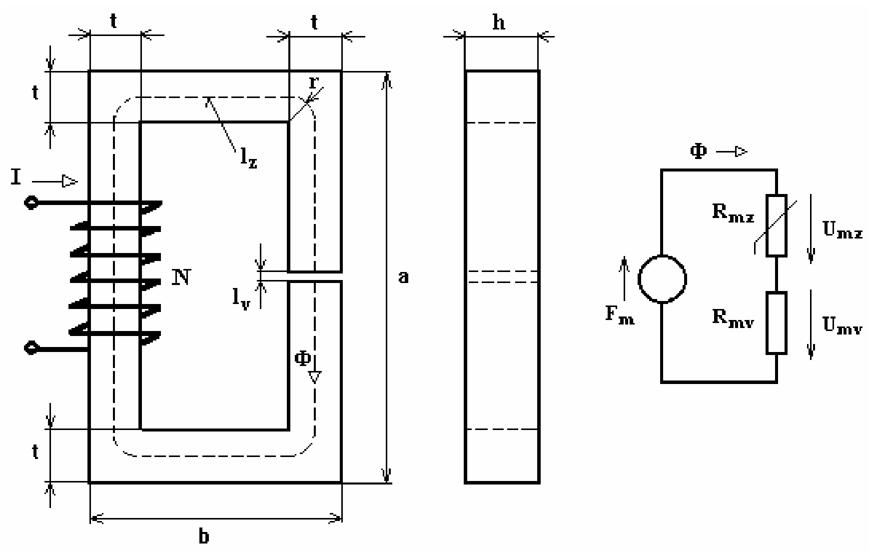
Celkové potřebné magnetomotorické napětí je pak dáno podle (4.5) součtem magnetických napětí dílčích sériově řazených částí

$$F_m = NI = U_{mv} + U_{mz} \ .$$

V praxi se toto napětí udává v "**ampérzávitech**", fyzikální rozměr je ovšem ampér. Můžeme je realizovat cívkou s malým počtem závitů N protékaných velkým proudem I nebo naopak cívkou s velkým počtem závitů při malém budícím proudu. Kterou variantu zvolíme, to závisí na parametrech napájecího zdroje – např. na tom, zda bude cívka napájena ze zdroje malého napětí (např. 12 V z akumulátoru) nebo většího napětí (např. 200 V získaných usměrněním napětí ze střídavé rozvodné sítě).

Příklad 4.4

Vypočtěte velikost proudu budicího vinutí cívky v magnetickém obvodu dle **Obr. 4.13a** pro magnetickou indukci ve vzduchové mezeře $B_v = 0.5T$. Jádro je složeno z dynamových plechů a má následující rozměry [*mm*]: *a*=300, *b*=200, *t*=20, *h*=30, l_v=5. Dále uvažujte počet závitů vinutí *N*=1000 a činitel plnění k_z=0.9.



a) b)

Obr. 4.13: Magnetický obvod a jeho náhradní schéma

Předpokládáme homogenní magnetické pole ve vzduchové mezeře i v železném jádře. To je, hlavně v rozích jádra, poměrně silný předpoklad. Pro zjednodušení řešení však jinou možnost prakticky nemáme a s jistým stupněm nepřesnosti je třeba se smířit. Při výpočtu úbytků magnetického napětí bereme jako délku l_z příslušné části obvodu délku střední indukční čáry. Tato čára, především pak v rozích, kde dochází k prudkým změnám směru magnetického pole a ke zvýšenému rozptylu, zohledňuje pravděpodobný zakřivený tvar indukčních čar. Dobrou aproximací je čtvrtkružnice, kterou také při řešení použijeme. Navíc je délka střední indukční čáry v rozích jádra mnohem menší ve srovnání s její délkou celkovou, takže chyby nebývají zpravidla příliš výrazné. Na **Obr. 4.13b** je uvedeno náhradní elektrické schéma magnetického obvodu, s vyznačením jeho lineární (vzduch) a nelineární (železo) části.

Velikost magnetovacího proudu vypočítáme ze vztahu $I = F_m / N$. Při určování F_m můžeme postupovat také takto (způsob řešení ekvivalentní s ***Příklad*** **4.3**). Protože magnetomotorické napětí budicího vinutí je rovno součtu magnetických napětí na všech částech obvodu, platí

$$F_m = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_z} \vec{H}_z \cdot d\vec{l} + \int_{l_v} \vec{H}_v \cdot d\vec{l} = U_{mz} + U_{mv} \,.$$

Pro magnetické napětí na vzduchové mezeře dostáváme

$$U_{mv} = \int_{l_v} \vec{H}_v \cdot d\vec{l} = H_v l_v = \frac{B_v}{\mu_0} l_v \doteq 1989.4A \;,$$

neboť integrujeme ve směru indukční čáry, kde je intenzita konstantní. Ze stejných důvodů platí pro magnetické napětí na železném jádře rovnice

$$U_{mz} = \int_{l_z} \vec{H}_z \cdot d\vec{l} = H_z l_z \;.$$

Celkovou délku střední indukční čáry (na **Obr. 4.13a** vyznačena čárkovaně) lze určit jako

$$l_z = 2(a-2t) - l_v + 2(b-2t) + 4 \cdot \frac{2\pi r}{4} = 2(a+b-4t) + \pi t - l_v \doteq 0.8978m \;,$$

kde indukční čára v rozích jádra byla aproximována čtvrtkružnicemi o poloměru $r = t/2$.

Intenzita magnetického pole H_z se určí z magnetizační křivky dynamových plechů pro danou hodnotu magnetické indukce B_z, viz **Obr. 4.11**. Můžeme psát

$$B_z = \frac{\Phi}{S_z} = \frac{B_v S_v}{k_z S_v} = \frac{B_v}{k_z} \doteq 0.556T \;,$$

neboť v sériovém magnetickém obvodu platí $\Phi_v = \Phi_z = \Phi$ a pro železné jádro uvažujeme stejný průřez $S_z = k_z S_v$ po celé jeho délce. $S_v = t \cdot h$ je průřez uvažovaný pro vzduchovou mezeru (rozptyl zde zanedbáváme). Z magnetizační křivky pak odečteme hodnotu intenzity $H_z \doteq 100Am^{-1}$. Pro magnetické napětí železného jádra obdržíme

$$U_{mz} = H_z l_z \doteq 89.78A$$

a pro magnetomotorické napětí budicího vinutí

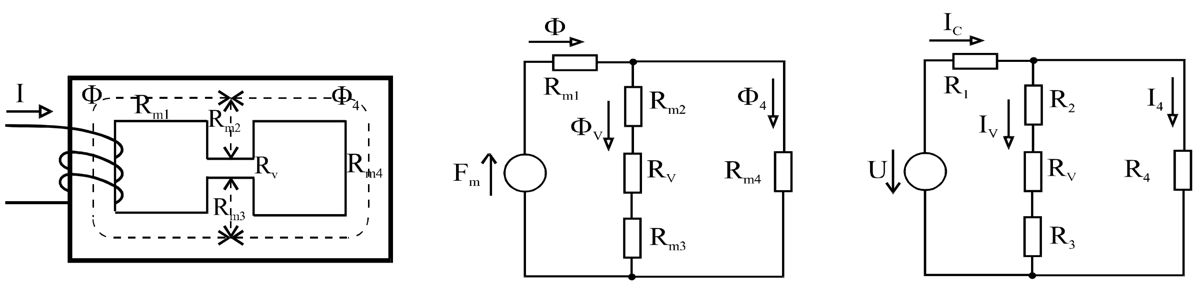
$$F_m = U_{mz} + U_{mv} \doteq 2079.2A \,.$$

Hledaný magnetovací proud vinutím má pak velikost

$$I = F_m / N \doteq 2.08A \,.$$

Příklad 4.5

Složitější magnetický obvod podle **Obr. 4.14a** se skládá z několika větví s rozdílnými geometrickými parametry (délka, průřez). Předpokládáme však stejný magnetický materiál. Řešení založíme na analogii magnetického a elektrického obvodu dle **Obr. 4.14b,c**.



a) b) c)

Obr. 4.14: Rozvětvený magnetický obvod a jeho náhradní schéma

Pro jednoduchost uvažujeme po délce jednotlivých větví všude stejně velký příčný průřez S_z a magnetickou indukci B_z. Ze zadaných podmínek ve vzduchové mezeře určíme magnetický tok Φ_v a magnetické napětí na mezeře U_{mv}, podobně jako v ***Příklad 4.3***.

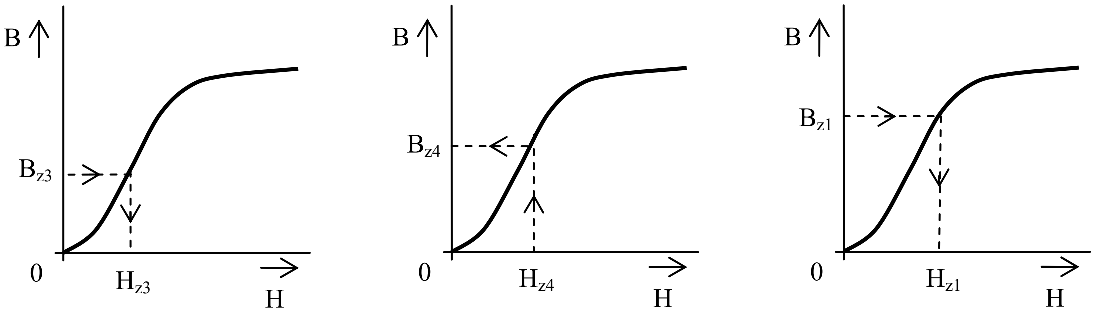
Magnetická indukce v pólových nástavcích je

$$B_{z2} = B_{z3} = \frac{\Phi_v}{S_{z3}}$$

a úbytek na nich (uvažujeme, že jsou stejně veliké)

$$U_{m2} = U_{m3} = l_{z3} H_{z3} \ .$$

Intenzitu H_{z3} jsme přitom odečetli z magnetizační křivky daného materiálu (**Obr. 4.15a**).



a) b) c)

Obr. 4.15: K postupu řešení rozvětveného magnetického obvodu

Celkové magnetické napětí na příčné větvi je pak

$$U_{m23v} = U_{mv} + U_{m2} + U_{m3} \ .$$

Toto napětí je však rovno úbytku na pravé větvi, neboť jsou spolu řazeny paralelně, proto

$$U_{m23v} = H_{z4} l_{z4} \ .$$

Odsud určíme intenzitu H_{z4}, odečteme z magnetizační křivky indukci B_{z4} (**Obr. 4.15b**) a vypočítáme magnetický tok Φ_4. Celkový tok dodávaný cívkou v levé větvi pak musí být

$$\Phi = \Phi_v + \Phi_4 = B_{z1} S_{z1} \, .$$

Nyní určíme indukci B_{z1}, z magnetizační křivky odečteme intenzitu H_{z1} (**Obr. 4.15c**) a vypočtítáme úbytek magnetického napětí

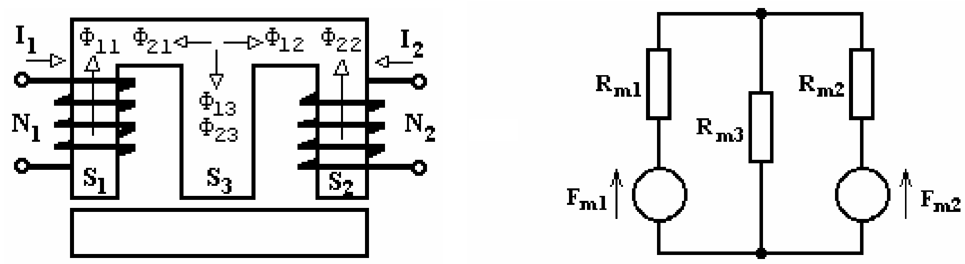
$$U_{m1} = H_{z1} l_{z1} \, .$$

Potřebné magnetomotorické napětí je konečně rovno

$$F_m = NI = U_{m23v} + U_{m1} \ .$$

Příklad 4.6

Vypočtěte vlastní indukčnosti L_1, L_2 a vzájemnou indukčnost M dvou cívek navinutých na společném jádře dle **Obr. 4.16a**. Jednotlivé sloupky jádra mají obecně různé průřezy S_1, S_2 a S_3. Rozptyl magnetického toku v rozích jádra zanedbejte.



a) b)

Obr. 4.16: K výpočtu vlastní a vzájemné indukčnosti

Řešení provedeme na základě analogie s elektrickými obvody. Magnetickému obvodu odpovídá náhradní elektrický obvod dle **Obr. 4.16b**. Pokud nebude k jednomu z vinutí zdroj proudu připojen, bude příslušné magnetomotorické napětí nulové a nebude třeba jej v modelu značit. Vyjdeme z definice vlastní indukčnosti (kap. 2.2.3)

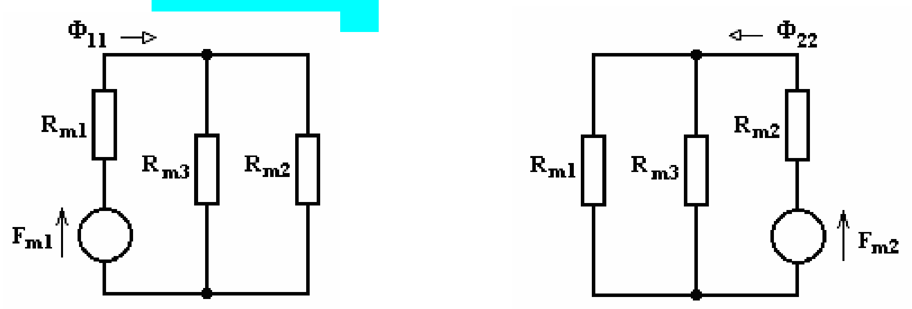
$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1} \quad , \quad L_2 = \frac{\Psi_{22}}{I_2}$$

a vzájemné indukčnosti (kap. 2.2.4)

$$M = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \qquad , \qquad M = M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} \; .$$

Zde Ψ_{11} značí magnetický tok spřažený s N_1 závity první cívky a I_1 je proud tekoucí touto cívkou, Ψ_{21} pak značí magnetický tok spřažený s N_2 závity druhé cívky, který je buzený proudem I_1 tekoucím první cívkou. Analogická tvrzení platí pro spřažené toky Ψ_{22} a Ψ_{12}.

Pro výpočet vlastní indukčnosti L_1 necháme proud procházet pouze cívkou s N_1 závity, viz náhradní obvod na **Obr. 4.17a**.



a) b)

Obr. 4.17: K výpočtu vlastních indukčností

Postupným zjednodušováním obvodu obdržíme pro celkový magnetický odpor

$$R_{ma} = R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}$$

a dle Hopkinsonova zákona pro magnetický tok

$$\Phi_{11} = \frac{F_{m1}}{R_{ma}} = \frac{N_1 I_1}{R_{ma}} \, .$$

Vlastní indukčnost L_1 je pak rovna

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} = \frac{N_1^{\ 2}}{R_{ma}} \ .$$

Pokud necháme protékat proud pouze cívkou s N_2 závity, dostaneme postupem analogickým předešlému pro vlastní indukčnost L_2 výraz

$$L_2 = \frac{\Psi_{22}}{I_2} = \frac{N_2 \Phi_{22}}{I_2} = \frac{N_2^{\ 2}}{R_{mb}} \ ,$$

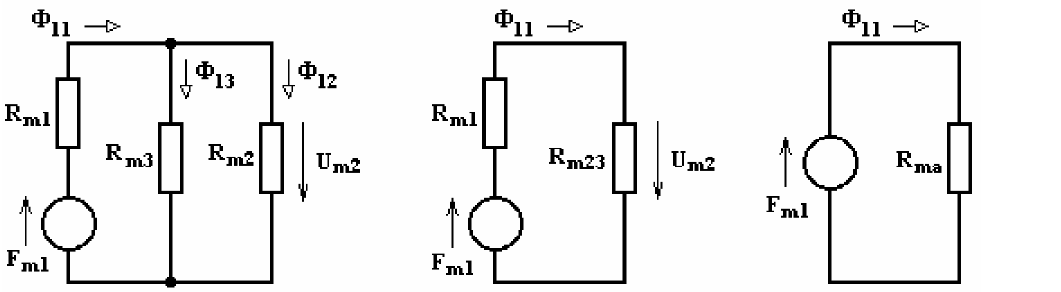
kde bylo dosazeno

$$\Phi_{22} = \frac{F_{m2}}{R_{mb}} = \frac{N_2 I_2}{R_{mb}} \quad \text{a} \quad R_{mb} = R_{m2} + \frac{R_{m1} R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}} \ ,$$

viz náhradní obvod na **Obr. 4.17b**.

Z výsledků je zřejmé, že **vlastní indukčnost** je přímo úměrná **kvadrátu počtu závitů** dané cívky a nepřímo úměrná celkovému magnetickému odporu R_m. Ten je dán rozměry a vlastnostmi použitého jádra, viz vztah (4.11). Proto se např. pro zvýšení indukčností cívek užívá jader s relativní permeabilitou $\mu_r >> 1$.

Pro výpočet vzájemné indukčnosti M můžeme vyjít z libovolného z výše uvedených náhradních obvodů. Vyjděme ze schématu na **Obr. 4.17a**, kde ještě vyznačíme další potřebné veličiny. To je provedeno na **Obr. 4.18**, spolu s naznačením celého postupu řešení.



a) b) c)

Obr. 4.18: K výpočtu vzájemné indukčnosti

Vzájemnou indukčnost budeme v tomto případě počítat ze vztahu

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \ .$$

Je proto třeba vypočítat magnetický tok Φ_{12}. Dále uvedený postup vychází opět z metody postupného zjednodušování obvodu. Zřejmě platí

$$\Phi_{12} = \frac{U_{m2}}{R_{m2}} = \frac{\Phi_{11} R_{m23}}{R_{m2}} = \frac{F_{m1}}{R_{ma}} \cdot \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} = N_1 I_1 \frac{R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m1} R_{m3} + R_{m2} R_{m3}} \ ,$$

po dosazením do definičního vztahu a úpravou pak dostáváme

$$M = \frac{N_1 N_2}{R_{m1} + R_{m2} + \dfrac{R_{m1} R_{m2}}{R_{m3}}} \ .$$

Vzájemná indukčnost je přímo úměrná **součinu počtů závitů** uvažovaných cívek a nepřímo úměrná magnetickým odporům částí jádra, na kterých jsou tyto cívky navinuty. Z výsledku je dále zřejmé, že se zvětšujícím se magnetickým odporem prostředního sloupku se vzájemná indukčnost také zvětšuje.

Odvoďme ještě výraz pro činitel vazby κ, definovaný v kap. 2.2.4, zde jako funkci dílčích magnetických toků vyznačených v **Obr. 4.16a**. Podle (2.33) zřejmě platí

$$\kappa^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{M_{21} M_{12}}{L_1 L_2} = \frac{\dfrac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \cdot \dfrac{N_1 \Phi_{21}}{I_2}}{\dfrac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} \cdot \dfrac{N_2 \Phi_{22}}{I_2}} = \frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}} \ .$$

Protože podle I. Kirchhoffova zákona

$$\Phi_{12} = \Phi_{11} - \Phi_{13} \le \Phi_{11} \qquad \text{a} \qquad \Phi_{21} = \Phi_{22} - \Phi_{23} \le \Phi_{22} \ ,$$

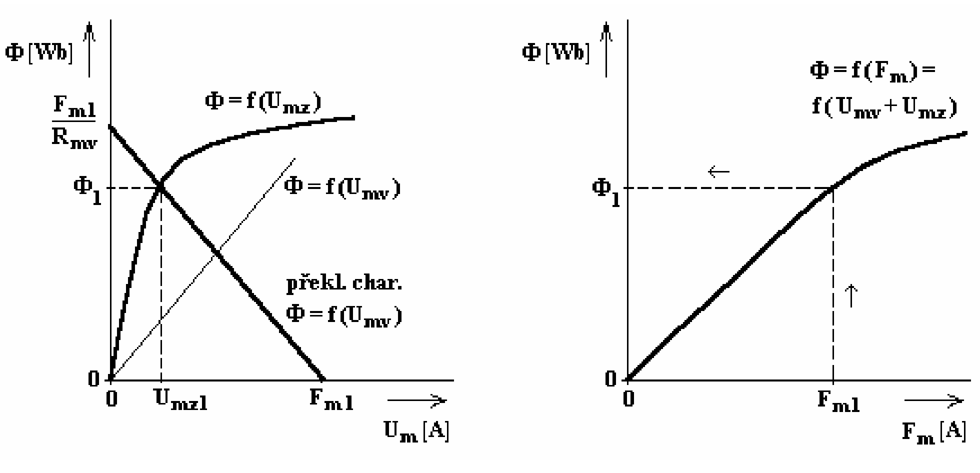
platí pro činitel vazby relace

$$\kappa = \sqrt{\frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}}} \le 1 \ .$$

Pokud by střední sloupec jádra nebyl přítomen, byl by zřejmě při zanedbání rozptylu činitel vazby roven jedné (dokonalá magnetická vazba). Pokud bychom naopak rozptyl uvažovat chtěli, lze použít tytéž rovnice po záměně toků Φ_{13} a Φ_{23} rozptylovými toky Φ_{r1} a Φ_{r2}.

Jak jsme poznali, jsou magnetické obvody se železnými jádry (feromagnetiky) obvody typicky nelineární. Proto při řešení opačného úkolu (při **analýze** magnetického obvodu), např. při určování magnetického toku pro zadanou hodnotu magnetomotorického napětí, je třeba používat složitější postupy, než které jsme doposud poznali. Pokud použijeme opět analogie s elektrickými obvody, lze aplikovat metody vypracované pro řešení **nelineárních** obvodů.

Pro výše uvedené jednoduché obvody, jako např. ***Příklad 4.3*** a ***Příklad 4.4***, lze použít grafickou **metodu překlopené charakteristiky**, viz **Obr. 4.19a**. Ta je vhodná v případě, že chceme určit magnetický tok pouze pro jednu zadanou hodnotu magnetomotorického napětí.



a) b)

Obr. 4.19: K postupu při analýze magnetického obvodu

Vypočítáme magnetická napětí železného jádra pro zvolenou řadu hodnot magnetického toku a sestrojíme charakteristiku $\Phi = f(U_{mz})$. To provedeme stejným způsobem, za předpokladu znalosti magnetizační charakteristiky $B_z = f(H_z)$, jako v dříve řešených příkladech. Přímková charakteristika vzduchové mezery $\Phi = f(U_{mv})$ se překlopí okolo svislé osy a posune na ose vodorovné o velikost magnetomotorického napětí F_{m1}. Magnetický odpor vzduchové mezery je dán rovnicí (4.10). V průsečíku obou charakteristik pak odečteme velikosti magnetického toku Φ_1 a magnetického napětí na jádře U_{mz1}. Všimněte si, že překlopená charakteristika vytíná na svislé ose úsek $\Phi_k = F_{m1}/R_{mv}$. Formální interpretace podle náhradního obvodu na **Obr. 4.13b** vede k závěru, že jde o velikost magnetického toku při zanedbání magnetického odporu železného jádra, tj. při $R_{mz} = 0$.

Řešení lze provést i následujícím způsobem. Lze totiž sestrojit celkovou magnetizační charakteristiku $\Phi = f(F_m)$ jako součet obou charakteristik předchozích, tj. $\Phi = f(U_{mz})$ a $\Phi = f(U_{mv})$. Sčítání se provádí pro zvolenou řadu hodnot magnetického toku ve směru osy magnetického napětí, neboť jde o sériové spojení R_{mz} a R_{mv}. Z této výsledné charakteristiky pak můžeme odečítat magnetické toky pro libovolné hodnoty magnetomotorického napětí nebo naopak. Postup je znázorněn na **Obr. 4.19b**.

Grafická konstrukce řešení je sice velmi názorná, avšak časově zdlouhavá a také méně přesná. Abychom však mohli početně pracovat s charakteristikami, které jsou získávány měřením a jsou k dispozici ve formě grafů (méně častěji tabulek), je nutno je nejdříve vyjádřit analyticky. K tomu slouží různé způsoby aproximace charakteristik, např. metoda interpolace pomocí polynomu určitého stupně či tzv. metoda nejmenších čtverců. Druhá metoda je zvláště vhodná pro aproximaci tabelovaných hodnot, které byly získány měřením, neboť umožňuje do jisté míry „vyhladit“ chyby, kterými je každé měření zatíženo.

Naznačený postup ukážeme na jednoduchém příkladě.

Příklad 4.7

Uvažujte magnetický obvod v ***Příklad 4.4***, jehož jádro je složeno z transformátorových plechů při činiteli plnění k_z=0.95. Geometrické rozměry magnetického obvodu jsou stejné. Vypočítejte velikost magnetického toku Φ a magnetickou indukci B_v ve vzduchové mezeře, je-li počet závitů N=1000 a magnetovací proud I=2.5A.

Podle věty o obvodovém napětí v magnetickém poli můžeme psát rovnici

$$F_m = NI = U_{mz} + U_{mv} = H_z l_z + H_v l_v = f^{-1}(B_z) l_z + \frac{B_v}{\mu_0} l_v = f^{-1}\left(\frac{B_v}{k_z}\right) l_z + \frac{B_v}{\mu_0} l_v \quad ,$$

kde označení $H_z = f^{-1}(B_z)$ vyjadřuje funkci inverzní k funkci $B_z = f(H_z)$, představující magnetizační křivku daného materiálu, viz **Obr. 4.11**. Obdrželi jsme rovnici pro hledanou veličinu, tj. pro magnetickou indukci B_v. Dále budeme předpokládat, že hodnota magnetické indukce v jádře leží v intervalu $B_z \in < 0.3 ; 0.9 > T$. Interpolací provedeme náhradu grafické závislosti $H_z = f^{-1}(B_z)$ polynomem n–tého stupně $H_z \doteq g_n(B_z)$. Závislost je monotonní, bude zřejmě dostatečné volit n=3. Hledáme proto koeficienty polynomu

$$g_3(B_z) = a_0 + a_1 B_z + a_2 B_z^{\ 2} + a_3 B_z^{\ 3} \ .$$

Z příslušné křivky na **Obr. 4.11** odečteme pro 4 zvolené hodnoty B_z odpovídající hodnoty H_z a zapíšeme do tabulky, viz**Tab. 4.2 Tab. 4.2**.

Tab. 4.2: Hodnoty odečtené z křivky $B=f(H)$

B_z [T]	0.3	0.5	0.7	0.9
H_z [A/m]	66	109	167	262

To nám umožní sestavit soustavu čtyř rovnic pro neznámé koeficienty a_k, $k = 0,1,2,3$, jako

$$\begin{aligned} a_0 + 0.3a_1 + 0.3^2 a_2 + 0.3^3 a_3 &= 66 \\ a_0 + 0.5a_1 + 0.5^2 a_2 + 0.5^3 a_3 &= 109 \\ a_0 + 0.7a_1 + 0.7^2 a_2 + 0.7^3 a_3 &= 167 \\ a_0 + 0.9a_1 + 0.9^2 a_2 + 0.9^3 a_3 &= 262 \end{aligned},$$

nebo v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.09 & 0.027 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 \\ 1 & 0.7 & 0.49 & 0.343 \\ 1 & 0.9 & 0.81 & 0.729 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ 109 \\ 167 \\ 262 \end{bmatrix}.$$

Vyřešením soustavy (např. Gaussovou eliminací či výpočtem inverzní matice) obdržíme

$$a_0 = -18.50,\ a_1 \doteq 390.4\ ,\ a_2 = -500.0\ ,\ a_3 \doteq 458.3\ .$$

Výchozí rovnice pro výpočet B_v v implicitním tvaru je

$$(a_0 + a_1 \frac{B_v}{k_z} + a_2 \frac{B_v^{\ 2}}{k_z^{\ 2}} + a_3 \frac{B_v^{\ 3}}{k_z^{\ 3}}) l_z + \frac{B_v}{\mu_0} l_v - NI = 0\ .$$

Po dosazení a úpravě dostáváme kubickou rovnici

$$479.9 B_v^{\ 3} - 497.4 B_v^{\ 2} + 4347.8 B_v - 2516.6 = 0\ ,$$

jejíž jediný reálný kořen má velikost $B_v \doteq 0.596T$.

Magnetický tok obvodem je konečně roven

$$\Phi = B_v S_v = B_v \cdot t \cdot h \doteq 0.358 mWb.$$

Poznámka:

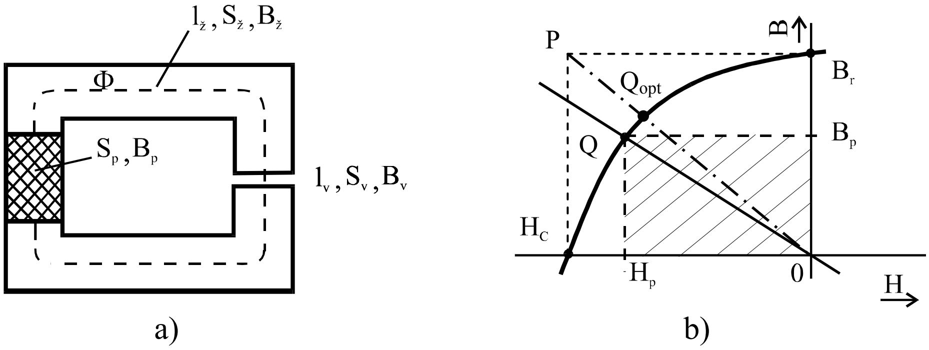
Výpočet kořenů polynomu stupně vyššího než 2 je zpravidla rychlejší některou numerickou metodou, než aplikací vzorců analytického řešení (pro polynomy stupně n>5 ani jiná možnost neexistuje). Dá se použít např. iterační metoda Newtonova (metoda tečen) či metoda regula falsi (metoda sečen) a další. Kromě různých programů pro osobní počítače jsou v dnešní době již běžně dostupné i kalkulátory, které uvedený výpočet velmi rychle zrealizují, stejně tak jako vyřeší i výše uvedenou soustavu lineárních rovnic. Pokud jde o metody aproximace, obvykle není třeba ani soustavu rovnic sestavovat, neboť řada programových prostředků (např. i nejrozšířenější Excel) disponuje možností interpolace polynomem zvoleného stupně a také možností aproximace ve smyslu nejmenšího součtu čtverců odchylek. To samé se týká i některých pokročilejších, zpravidla tzv. grafických, kalkulátorů.

4.4 Magnetický obvod s permanentním magnetem

K vytvoření magnetického pole tak, jak jsme to ukázali v předcházejících příkladech, vždy potřebujeme určitý elektrický proud. Průtokem tohoto proudu závity cívky však vznikají ztráty elektrické energie, protože vodič cívky vykazuje určitý nenulový elektrický odpor.

Pokroky v technologii výroby **permanentních** (trvalých) **magnetů** vytvořily podmínky pro generování magnetických polí i bez nároků na elektrickou energii dodávanou z vnějšku. Magneticky tvrdé materiály se širokou hysterezní smyčkou, tj. s velkou remanentní indukcí a koercivitou (viz **Obr.** 4.9, smyčka 2), umožňují vytvořit magnetické pole v pracovní oblasti obvodu i bez přítomnosti budicího vinutí a zdroje proudu. S permanentními magnety se setkáváme např. v magnetických obvodech reproduktorů a sluchátek, měřicích přístrojů, malých i větších stejnosměrných, synchronních a krokových motorků a v dalších aplikacích.

Náčrtek jednoduchého magnetického obvodu s permanentním magnetem je na **Obr. 4.20a**.



Obr. 4.20: Magnetický obvod s permanentním magnetem a jeho řešení

Kostka permanentního magnetu (na obrázku šrafovaná část) je opatřena pólovými nástavci z feromagnetického magneticky měkkého materiálu. Vzduchová mezera mezi konci nástavců je pracovním prostorem, ve kterém má být vytvořeno požadované magnetické pole.

Vzhledem k velmi vysoké permeabilitě materiálu pólových nástavců lze úbytky magnetického napětí na nich prakticky zanedbat. Magnetický tok v obvodu je roven

$$\Phi = B_p S_p = B_v S_v \ . \qquad (4.28)$$

Součet magnetických napětí na magnetu a na mezeře je roven nule, protože v obvodu není žádný další zdroj

$$U_{mp} + U_{mv} = 0 \ . \qquad (4.29)$$

Proto můžeme psát

$$U_{mp} = -U_{mv} = -\frac{B_v}{\mu_0} l_v = H_p l_p \ . \qquad (4.30)$$

Po dosazení za indukci B_v ve vzduchové mezeře ze vztahu (4.28) dostaneme pro intenzitu magnetického pole uvnitř permanentního magnetu vztah

$$H_p = -\frac{B_v}{\mu_0} \frac{l_v}{l_p} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{S_p}{S_v} \frac{l_v}{l_p} B_p \ . \qquad (4.31)$$

Jedná se o rovnici přímky, kterou zakreslíme do souřadné soustavy (H_p, B_p), ve které máme hysterezní smyčku permanentního magnetu, viz **Obr. 4.20b**. Přímka prochází počátkem a má zápornou směrnici. Protíná proto hysterezní smyčku ve 2. kvadrantu, na tzv. **demagnetizační charakteristice**. Průsečík Q určuje hodnoty H_p a B_p za daných podmínek – pro dané rozměry permanentního magnetu a vzduchové mezery. Sklon přímky závisí mimo jiné na délce vzduchové mezery. Zmenšení mezery znamená zvětšení směrnice (v absolutní hodnotě). V limitním případě, kdy $l_v \to 0$, klesá H_p k nule a současně se indukce blíží k hodnotě B_r, k remanentní indukci magnetu. Obvodem protéká maximální remanentní tok $\Phi_r = B_r S_p$. Na druhé straně zvětšení mezery může v krajním případě znamenat nulový magnetický tok, zatímco intenzita magnetického pole v magnetu vzroste na hodnotu koercivity H_c. Tato přímka je v podstatě překlopenou charakteristikou vzduchové mezery, viz **Obr. 4.19a**, ovšem přepočtenou do souřadnic magnetizační čáry (*B*, *H*). Vzhledem k $F_m = 0$ se dále neposouvá ve směru osy *H*.

V praxi bývají hodnoty vzduchové mezery S_v, l_v, B_v dány. Volbou zbývajících parametrů pak můžeme magnetický obvod optimalizovat. Za optimální považujeme řešení, kdy dosahujeme předepsaných hodnot magnetického pole ve vzduchové mezeře při nejmenší spotřebě materiálu permanentního magnetu, neboť jeho cena zpravidla určuje cenu celého obvodu.

V absolutních hodnotách jsou úbytky magnetického napětí U_{mp} a U_{mv} stejně veliké, tj.

$$H_p l_p = H_v l_v \ . \tag{4.32}$$

Záporné znaménko zde nemusí být bráno v úvahu, protože má význam jen při řešení obvodu v příslušných charakteristikách. Současně je stejně veliký i magnetický tok v magnetu a v mezeře (při zanedbání rozptylu)

$$B_p S_p = B_v S_v \ . \tag{4.33}$$

Nyní spolu rovnice (4.32) a (4.33) vynásobíme, tj.

$$B_p H_p l_p S_p = B_v H_v l_v S_v = \frac{B_v^{\,2}}{\mu_0} l_v S_v \ , \tag{4.34}$$

a vyjádříme součin $l_p S_p$, který je roven objemu materiálu permanentního magnetu

$$V_p = l_p S_p = \frac{B_v^{\,2} l_v S_v}{\mu_0 B_p H_p} = \frac{konst}{B_p H_p} \ . \tag{4.35}$$

Vidíme, že potřebný objem materiálu je nepřímo úměrný součinu $B_p H_p$ v pracovním bodě. Tento tzv. **energetický součin** má rozměr J/m^3 a udává objemovou hustotu energie. Pro minimální objem permanentního magnetu je třeba, aby součin $B_p H_p$ byl maximální.

Maximálním energetickým součinem $(B_p H_p)_{\max}$ je určena poloha optimálního pracovního bodu Q_{opt}, a tedy optimálních hodnot magnetické indukce B_{popt} a intenzity H_{popt}, při které se dosáhne minimálního objemu permanentního magnetu $V_{p\min}$. Podle **Obr. 4.20b** je tento bod vrcholem obdélníka s maximální plochou. Přibližně lze jeho polohu nalézt jako průsečík úhlopříčky $\overline{OP}$ obdélníka o stranách $\overline{OB_r}$ a $\overline{OH_c}$ s magnetizační čarou permanentního magnetu. Dá se dokázat, že pokud bychom aproximovali tuto část hysterezní smyčky pomocí čtvrtelipsy, vede uvedená konstrukce k přesnému řešení.

Následující **Tab. 4.3** uvádí několik typických materiálů, které se používají k výrobě permanentních magnetů. V tabulce jsou uvedeny hodnoty remanentní indukce, koercivity a maximálního energetického součinu.

Tab. 4.3: Materiály pro permanentní magnety

Materiál magnetu	$B_r[T]$	$H_c[A/m]$	$(B_p H_p)_{\max}[J/m^3]$	Poznámka
kobaltová ocel	0.95	18	4.5	1)
AlNiCo	1.25	45	15	2)
nipermag	0.55	55	8	
izotropní ferit	0.23	130	20	
anizotropní ferit	0.35	240	25	
SmCo5	0.95	670	160 – 195	3)
R2Co17	1.1	725	190 – 240	4)
NdFeB	1.2	900	225 – 280	5)

Poznámka:

1) klasický materiál první třetiny 20. století

2) materiál používaný koncem 30. let a během 2. světové války

3), 4), 5) moderní materiály ze vzácných zemin

3) samarium + kobalt

5) neodym + železo + bór

Pokud jsou pro magnetický obvod kromě parametrů pracovního prostoru předepsány i jeho zbylé geometrické rozměry, např. z důvodů konstrukčních, je volba vhodného materiálu pro permanentní magnet prakticky jedinou možností, jak magnetický obvod optimalizovat. Z dostupných materiálů pak vybíráme ten, jehož užitím se co nejvíce přiblížíme k pracovnímu bodu Q_{opt}.

5 Časově proměnné obvodové veličiny

V těchto skriptech jsme se dosud zabývali především analýzou rezistorových obvodů, které jsou obvody nesetrvačnými (kap. 3). Pro zjednodušení analýzy jsme předpokládali, že jsou buzeny pouze ze zdrojů stejnosměrného (v čase konstantního) napětí a proudu. Proto také všechna vypočtená napětí a proudy byly stejnosměrné. Jak jsme však již poznali v úvodních částech skript (kap. 1, kap. 2), obvodové veličiny jsou obecně v čase proměnné. Tato časová proměnnost může být přitom způsobena nejen vlastními časově proměnnými napájecími zdroji, ale také jako důsledek fyzikálních jevů, které mohou v obvodu nastávat. Budeme-li např. uvažovat obvody setrvačné, tj. ty které obsahují také akumulační prvky (induktor a kapacitor), je časová proměnnost obvodových veličin důsledkem tzv. přechodných jevů (viz kurz *Elektrotechnika 2*). Ty nastávají po zapnutí napájecích zdrojů nebo při změně nějakého obvodového parametru. V tomto případě pak bude odezva v obvodu časově proměnná, i když budou napájecí zdroje stejnosměrné. Naopak můžeme uvažovat obvod, který je ve stavu ustáleném, tj. kdy přechodné jevy (např. po připojení napájecích zdrojů) již v čase odezněly (přesněji jejich vliv lze prakticky zanedbat), ale který je buzen ze zdrojů periodických časově proměnných napětí či proudů (kap. 5.2). Potom hovoříme o tzv. periodickém ustáleném stavu. Speciálním případem je v praxi velmi důležitý harmonický ustálený stav (podrobně viz kurz *Elektrotechnika 2*), kdy je možné časové závislosti obvodových veličin popsat pomocí funkcí sinus nebo kosinus. Jsou-li napětí či proudy budicích zdrojů stejnosměrné, hovoříme v této souvislosti o stejnosměrném ustáleném stavu.

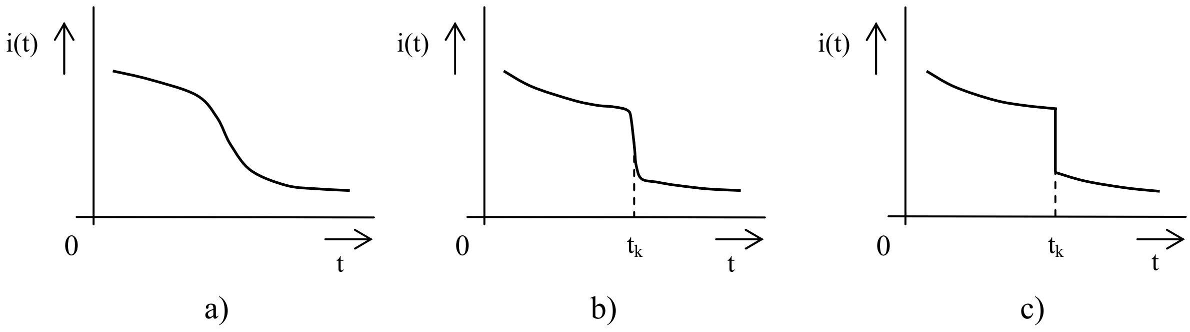
Časově proměnné mohou být nejen obvodové veličiny napětí a proud, které považujeme v teorii obvodů za základní, ale také veličiny pomocné (elektrický náboj a magnetický tok), které jsou nezbytné právě pro definici základních obvodových veličin a prvků. V obvodech se soustředěnými parametry jsou všechny tyto obvodové veličiny pouze funkcí času, v obvodech s parametry rozprostřenými budou ještě navíc funkcí jedné prostorové souřadnice (viz kurz *Elektrotechnika 2*). Také u magnetických obvodů (kap. 4), ve kterých jsme budili magnetický tok průchodem proudu závity cívky, jsme dosud uvažovali proud stejnosměrný. Důsledkem byly stejnosměrné hodnoty magnetických veličin v pracovní oblasti magnetického obvodu. Avšak např. pro činnost transformátoru, má-li se v jeho sekundárním vinutí indukovat napětí, je nezbytné, aby proud primární cívkou byl časově proměnný. Jen tak bude totiž generován v jádře transformátoru časově proměnný magnetický tok, který v sekundární cívce způsobí indukci napětí podle Faradayova indukčního zákona.

5.1 Klasifikace časových průběhů veličin

Z výše uvedeného vyplývá, že v elektrických (ale i magnetických) obvodech se můžeme prakticky setkat s velmi rozmanitými typy časových průběhů obvodových veličin. Jejich charakter významně ovlivňuje i volbu metod obvodové analýzy.

Determinované průběhy lze vyjádřit matematickými funkcemi, které jednoznačně určují jejich funkční hodnoty v jednotlivých časových okamžicích. Pro daný časový okamžik lze proto jeho dosazením vypočítat zcela určitou hodnotu napětí či proudu. Naproti tomu **nedeterminované** (stochastické) průběhy mají charakter náhodných procesů, kdy lze jejich hodnoty očekávat vždy jen s určitou pravděpodobností. Sem patří např. problematika šumů v elektrických obvodech. My se však v rámci úvodních kurzů elektrotechniky omezíme pouze na průběhy determinované.

Determinované průběhy dělíme z matematického hlediska na **spojité** a **nespojité**. Příklady spojitých průběhů proudu jsou na **Obr. 5.1a**,**b**, nespojitého průběhu na **Obr. 5.1c**.



Obr. 5.1: Příklady spojitých a nespojitých veličin

V teorii obvodů používáme ideální obvodové prvky, u kterých se předpokládá přeměna pouze jednoho druhu energie. Energie je však z makroskopického hlediska spojitou funkcí času. Proto bylo např. u induktoru, kde se energie akumuluje pouze v magnetickém poli, nutné, aby se magnetický tok i proud měnily spojitě, zatímco u napětí tomu tak být nemuselo. Podobně u kapacitoru, kde se energie akumuluje pouze v elektrickém poli, musel být spojitý elektrický náboj a napětí, zatímco se připouštěla nespojitá změna proudu (viz také **Obr. 2.10**). Pokud by se totiž měla stavová (energetická) veličina změnit o konečnou hodnotu za nekonečně krátký časový interval, bylo by k tomu nutno dodat nekonečně vysoký výkon. V reálných obvodech se však s typem nespojitých průběhů ani nesetkáváme, což je dáno následující skutečností. U reálných prvků jsou totiž časové změny napětí a proudu vždy svázány s vytvářením a zánikem energie obou typů polí – elektrického i magnetického – protože každý reálný prvek má kromě své dominantní vlastnosti i příslušné vlastnosti parazitní. Přesto se mohou v určitých situacích vyskytnout tak rychlé časové změny některé obvodové veličiny, že je lze vzhledem k době trvání jiných obvodových veličin považovat za zanedbatelně krátké, a její nespojitý (skokový) průběh uvažovat jako jakousi užitečnou abstrakci, která nám usnadní analýzu daného obvodu (**Obr. 5.1b**,**c**). Nespojitosti jsou vyznačovány svislými čarami. S uvedenou problematikou se podrobněji setkáme až v teorii přechodných dějů v rámci předmětu *Elektrotechnika 2*.

Z hlediska matematických postupů užívaných při analýze obvodů je vhodné rozdělit determinované průběhy dále na **stacionární**, **periodické** a **neperiodické**.

5.2 Stacionární a periodické veličiny

Stacionární průběh nemění v čase svoji velikost ani svůj smysl. V praxi se běžně užívá pojmu **stejnosměrný**, přestože se nejedná o významově plně adekvátní výraz (není v něm totiž zahrnuta ona neměnnost ve velikosti). Jak jsme již poznali v kap. 3, jsou stejnosměrná napětí a proudy charakterizovány jedinou konstantou, značenou velkými písmeny U a I.

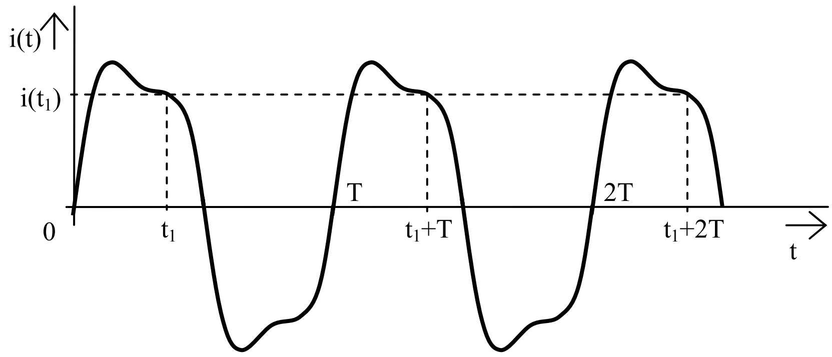
Periodický průběh je takový průběh, jehož hodnoty se opakují po určité době T, která se nazývá **perioda**. Jednotkou je sekunda [s]. Pro periodický průběh proudu např. platí

$$i(t+kT)=i(t) \quad , \qquad (5.1)$$

kde k je libovolné celé číslo, viz **Obr. 5.2**. Převrácená hodnota periody je **frekvence**

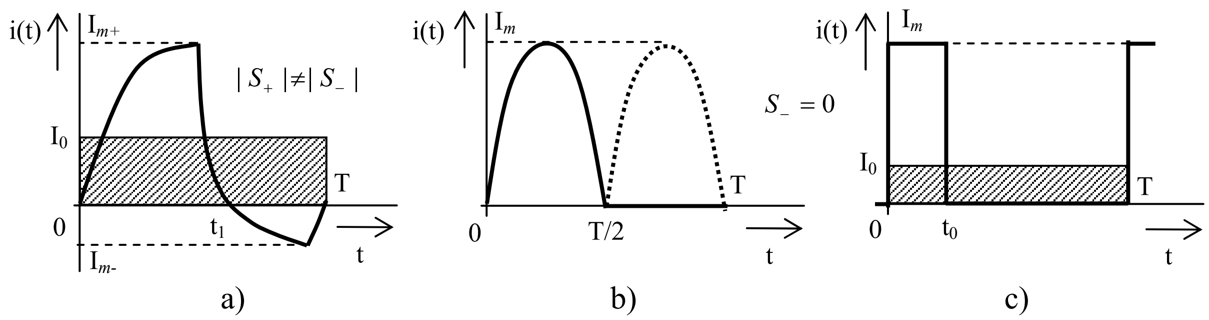
$$f=\frac{1}{T} \quad , \qquad (5.2)$$

s jednotkou hertz [Hz]. Běžně se užívá také názvu **kmitočet**.



Obr. 5.2: Příklad části periodické funkce proudu

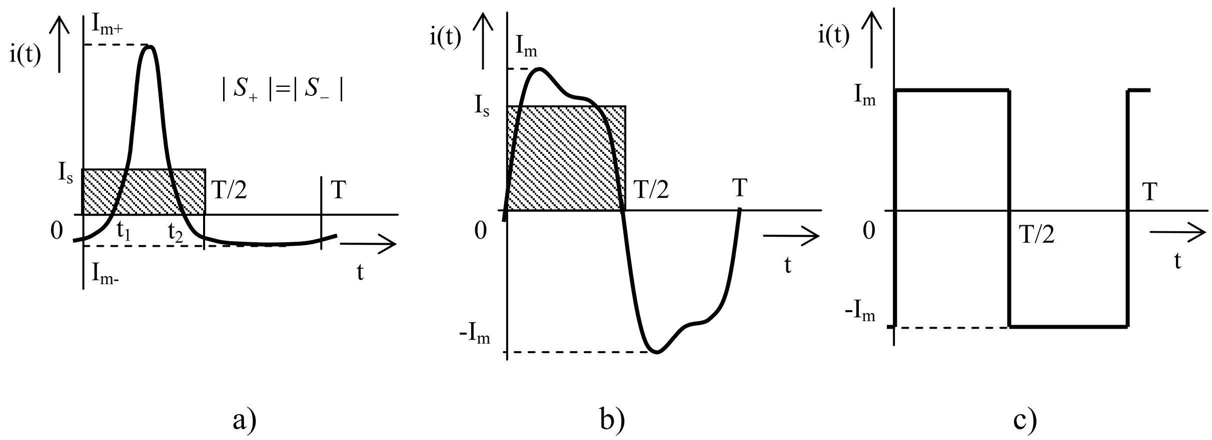
Periodické průběhy je vhodné dále klasifikovat podle následujících znaků. Obecný periodický průběh s nestejnou kladnou a zápornou plochou v rámci periody se označuje jako **kmitavý** (**Obr. 5.3a**). Periodický průběh, který nabývá pouze jedné polarity, se nazývá jako **pulsující**. Typickými průběhy tohoto typu jsou např. jednocestně i dvojcestně usměrněný harmonický proud (**Obr. 5.3b**) nebo v praxi často užívané opakované obdélníkové impulsy (**Obr. 5.3c**).



Obr. 5.3: Příklad kmitavého a pulsujících periodických průběhů

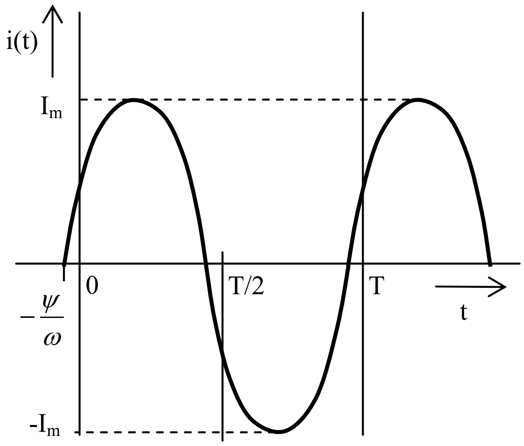
Jsou-li tyto kladné a záporné plochy stejně veliké, hovoříme o průběhu **střídavém**. Tento pak dále může být **nesouměrný** (**Obr. 5.4a**) nebo **souměrný** (**Obr. 5.4b**,**c**), pokud je tvar půlvln v periodě shodný. Souměrný střídavý průběh se také nazývá **antiperiodický**, kdy zřejmě platí rovnice

$$i(t+T/2) = -i(t) \ . \qquad (5.3)$$



Obr. 5.4: Příklad nesouměrného a souměrných střídavých průběhů

Mezi nejvýznamnější souměrné střídavé průběhy, které nalézají největší uplatnění jak v praxi, tak při teoretických úvahách rozmanitého charakteru, patří průběh **harmonický**, viz **Obr. 5.5**.



Obr. 5.5: Harmonický průběh proudu s nenulovou počáteční fází

Harmonický průběh lze matematicky popsat funkcí sinus nebo kosinus. Pomocí funkce sinus můžeme např. psát pro harmonický průběh proudu

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) \ , \qquad (5.4)$$

kde I_m je **amplituda** (maximální hodnota), ω je **úhlová frekvence** definovaná jako

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \ , \qquad (5.5)$$

s jednotkou [rad/s], a konstanta ψ je **počáteční fáze (**fázový úhel), v jednotkách [rad].

Problematikou řešení obvodů, které jsou buzeny zdroji harmonických průběhů napětí a proudů, se budeme podrobně zabývat až v kurzu *Elektrotechnika 2*, kde budou uvedeny i další podrobnosti ke způsobu reprezentace harmonických funkcí.

Jak je z výše uvedeného patrné, obecně je periodická funkce plně určena svým časovým průběhem za dobu jedné periody. V některých aplikacích však vystačíme pouze se znalostí určitých **charakteristických hodnot** takového průběhu. Patří sem následující hodnoty:

Maximální hodnota je největší absolutní hodnota, které periodická funkce během periody nabývá. Značí se zpravidla indexem *m*, jak je uvedeno v příkladech na **Obr. 5.3** až **Obr. 5.5** pro elektrický proud. Je možné se setkat také s označením *max*. Je-li třeba rozlišit kladnou a zápornou maximální hodnotu, které nejsou stejně velké, používají se indexy *m+* a *m-*, viz **Obr. 5.3a** a **Obr. 5.4b**. Tato potřeba může vyvstat např. při udávání maximálních dovolených napětí některých nereciprocitních elektronických prvků, jako např. u polovodičové diody. Maximálních hodnot napětí se dále užívá k posuzování elektrického namáhání izolantů aj.

Střední hodnota v době jedné periody (**stejnosměrná složka**) je průměrná hodnota časové funkce za dobu jedné periody. Např. pro proud je rovna

$$I_0 = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt \ . \qquad (5.6)$$

Fyzikálně se jedná o takovou hodnotu stejnosměrného proudu, kterým se přenese stejně velký elektrický náboj, jako proudem původním. Geometricky se jedná o výšku obdélníka s délkou hrany rovné době periody a stejné ploše, jako je plocha vymezená původní funkcí (**Obr. 5.3).**

Kromě střední hodnoty napětí a proudu je užitečné zavést také střední hodnotu okamžitého výkonu $p(t) = u(t)i(t)$, který byl definován již v kap. 1.1. Tato střední hodnota je rovna

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt \ , \qquad (5.7)$$

a nazývá se **činný výkon**, s jednotkou [W].

Z obrázků i definice je zřejmé, že pokud bychom stejnosměrnou složku od daného časového průběhu odečetli, dostaneme z funkce kmitavé či pulsující funkci střídavou.

Pro samotnou funkci střídavou je stejnosměrná složka rovna nule, neboť zde jsou si kladné a záporné plochy za dobu periody rovny. Abychom však byli schopni nějak charakterizovat „průměrné“ účinky veličin, které jsou popsány střídavými časovými průběhy, byla zavedena **střední hodnota v době jedné půlperiody**. Např. pro proud je rovna

$$I_s = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} i(t)dt \ , \qquad (5.8)$$

kde časové okamžiky t_1 a t_2 vymezují kladnou část půlvlny. Geometricky je rovna výšce obdélníka se základnou délky poloviny periody a ploše rovné jedné půlvlně, viz **Obr. 5.4**. Tato hodnota nachází uplatnění např. při výpočtech indukovaného napětí podle Faradayova indukčního zákona, je-li spřažený magnetický tok v čase periodicky proměnný.

Definice střední hodnoty podle (5.8) selhává v případech, kdy časový průběh prochází během periody vícekrát nulovou hodnotou. Bylo by sice možné integrovat přes více časových úseků, takový postup se však jeví jako příliš těžkopádný. Jako obecněji použitelná se jeví tzv. **aritmetická střední hodnota**, definovaná pomocí absolutní hodnoty vztahem

$$I_{sa} = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|dt \ . \qquad (5.9)$$

Jedná se vlastně o střední hodnotu dvojcestně usměrněného proudu v době jedné periody. Pro časové průběhy se dvěma průchody nulou je tato definice rovnocenná s (5.8). Uvedená charakteristická hodnota se nejčastěji užívá v měřicí technice.

V technické praxi se nejčastěji užívá **efektivní hodnota** periodického průběhu proudu, neboť vyjadřuje jeho energetické účinky. Označuje se velkými písmeny bez indexu, pouze v případě nebezpečí záměny se může užít indexu *ef*, příp. *rms* (odvozeno od anglického *root–mean-square*). Fyzikálně je efektivní hodnota taková hodnota stejnosměrného proudu, který má za dobu jedné periody stejné tepelné účinky jako proud původního průběhu. Vyjdeme-li ze vztahů pro energii přeměněnou v teplo v lineárním rezistoru s odporem R (viz rovnice (2.9) a (2.10)), dostaneme z porovnání obou energetických účinků rovnost

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2(t)dt \ , \qquad (5.10)$$

odkud ihned dostáváme vztah

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} \ . \qquad (5.11)$$

Je to vlastně odmocnina ze střední hodnoty kvadrátu časového průběhu dané funkce.

Efektivní hodnota periodického proudu a napětí je charakteristika, kterou je třeba v praxi také nejčastěji stanovit měřením. Proto se běžné měřicí přístroje (ampérmetry, voltmetry) cejchují právě v hodnotách efektivních. Praktická realizace převodníků efektivní hodnoty je však obvodově (a finančně) náročnější než realizace převodníků pro měření hodnoty střední. Proto se v levnějších měřicích přístrojích používá převodníků pro měření střední hodnoty a hodnota efektivní je získána až při cejchování přístroje vynásobením tzv. **činitelem tvaru**

$$k_t = \frac{I}{I_s} \; . \tag{5.12}$$

Takovéto přístroje jsou cejchovány pouze pro měření harmonických časových průběhů, pro které je činitel tvaru $k_{th} = \pi/2\sqrt{2} \doteq 1.1107$. Měříme-li pak napětí či proud odlišného tvaru, dopouštíme se systematické chyby měření. V měřicí technice se přístroje, jejichž převodníky realizují přímo definiční vztah **(** 5.11 **)**, často označují jako přístroje pro měření „skutečné (pravé) efektivní hodnoty“ (někdy opatřeny nápisem TRMS, od anglického *true rms*). Jejich přesnost je však závislá také na relativní velikosti efektivní hodnoty vůči maximální hodnotě měřené veličiny, čímž se postihují dynamické vlastnosti použitého převodníku. Přesnost přístroje je pak zaručována jen do jisté největší hodnoty tzv. **činitele výkyvu**

$$k_v = \frac{I_m}{I} \; . \tag{5.13}$$

Pro charakterizaci střídavých průběhů byl definován ještě tzv. **činitel plnění**

$$k_p = \frac{I_s}{I_m} \; , \tag{5.14}$$

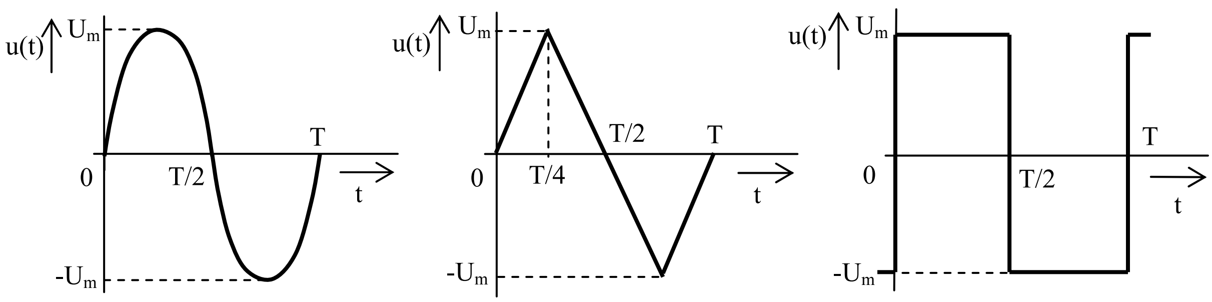
který nalézá uplatnění především v silnoproudé elektrotechnice a elektroenergetice.

Všechny výše uvedené charakteristické hodnoty byly hodnotami integrálními. Vzhledem k periodicitě průběhů lze volit i jiný rozsah integrace než uvedený $(0,T)$. Často se v praxi užívá interval $(-T/2, T/2)$, lze jej však volit zcela obecně jako $(t_k, t_k + T)$, kde t_k je libovolný časový okamžik.

Stacionární a **periodické** průběhy se často označují jako **ustálené**.

Příklad 5.1

Vypočtěte střední hodnotu v době jedné půlperiody, efektivní hodnotu a činitele tvaru, výkyvu a plnění pro souměrná střídavá napětí sinového, trojúhelníkového a obdélníkového časového průběhu dle **Obr. 5.6**.



a) b) c)

Obr. 5.6: Napětí sinového, trojúhelníkového a obdélníkového průběhu

a) sinový průběh

$$U_s = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} U_m \sin\omega t dt = \frac{2U_m}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{T/2} = \frac{2}{\pi}U_m \doteq 0.6366 U_m$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2T}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^T} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \doteq 0.7071 U_m$$

$$k_t = \frac{U}{U_s} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \doteq 1.1107, \qquad k_v = \frac{U_m}{U} = \sqrt{2} \doteq 1.4142, \qquad k_p = \frac{U_s}{U_m} = \frac{2}{\pi} \doteq 0.6366 .$$

b) trojúhelníkový průběh

Vzhledem k symetrii se můžeme omezit pouze na první čtvrtperiodu:

$$U_s = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} \frac{4U_m}{T} t dt = \frac{16U_m}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{T/4} = \frac{U_m}{2} .$$

Můžeme také užít geometrické představy, kdy z rovnosti ploch obdélníka a trojůhelníka

$U_s \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{T}{2}U_m$ ihned tento výsledek vyplývá.

$$U = \sqrt{\frac{4}{T}\int_0^{T/4}\left(\frac{4U_m}{T}t\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{64U_m^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/4}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} \doteq 0.5774 U_m .$$

$$k_t = \frac{U}{U_s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \doteq 1.1547, \qquad k_v = \frac{U_m}{U} = \sqrt{3} \doteq 1.7321, \qquad k_p = \frac{U_s}{U_m} = \frac{1}{2} .$$

Lze snadno ukázat, že výsledky nezávisí na poloze vrcholu trojúhelníka, jsou proto platné i pro obecnější střídavé trojúhelníkové průběhy (např. pilové).

c) obdélníkový průběh

$U_s = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} U_m dt = \frac{2U_m}{T}[t]_0^{T/2} = U_m$, což je zřejmé přímo z geometrické představy.

$U = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} U_m^2 dt} = \sqrt{\frac{2U_m^2}{T}[t]_0^{T/2}} = U_m$, což je zřejmé také z fyzikální představy.

Pro poměrné činitele proto dostáváme

$$k_t = \frac{U}{U_s} = 1, \qquad k_v = \frac{U_m}{U} = 1, \qquad k_p = \frac{U_s}{U_m} = 1 .$$

Příklad 5.2

Vypočtěte střední hodnotu v době jedné periody (stejnosměrnou složku) jednocestně a dvojcestně usměrněného sinusového proudu (**Obr. 5.3b**) a obdélníkového pulsu (**Obr. 5.3c**).

– jednocestně usměrněný sinusový průběh (ve druhé půlperiodě je proud nulový)

$$I_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} I_m \sin\omega t dt = \frac{I_m}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{T/2} = \frac{I_m}{\pi} \doteq 0.3183 I_m \ .$$

– dvojcestně usměrněný sinusový průběh

$$I_0 = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} I_m \sin\omega t dt + \int_{T/2}^{T} \left|I_m \sin\omega t\right| dt\right) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I_m \sin\omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m \doteq 0.6366 I_m \ .$$

(výsledek odpovídá střední hodnotě v době jedné půlperiody, tj také aritmetické střední hodnotě původního neusměrněného průběhu).

– obdélníkový puls délky t_0

$$I_0 = \frac{1}{T}\int_0^{t_0} I_m dt = \frac{I_m}{T}[t]_0^{t_0} = \frac{t_0}{T} I_m \ ,$$

což je zřejmé i z geometrické představy, neboť z rovnosti ploch obdélníků $I_0 T = I_m t_0$ daný výsledek ihned vyplývá.

Příklad 5.3

Jádrem cívky s N závity prochází střídavý magnetický tok $\Phi(t)$ antiperiodického časového průběhu, jehož amplituda je Φ_m. Vypočtěte velikosti střední a efektivní hodnoty indukovaného napětí.

Podle Faradayova indukčního zákona můžeme pro indukované napětí na cívce psát

$$u_i(t) = \frac{d\Psi}{dt} = N\frac{d\Phi}{dt} \ ,$$

kdy jsme předpokládali, že všemi závity prochází tentýž magnetický tok. Pro střední hodnotu v době jedné půlperiody dostáváme

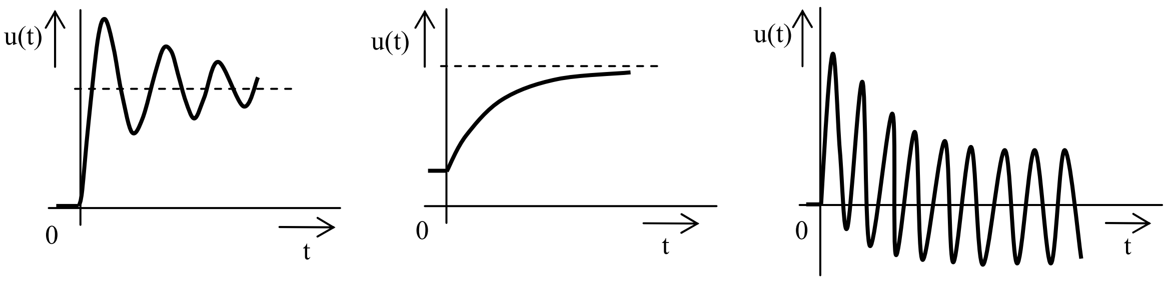
$$U_s = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u_i(t) dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} N\frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{2N}{T}\int_{-\Phi_m}^{+\Phi_m} d\Phi = \frac{4N}{T}\Phi_m = 4 fN\Phi_m \ .$$

V rovnici byly uvažovány časové okamžiky $t_1 = 0$ a $t_2 = T/2$ jako okamžiky, ve kterých indukované napětí prochází nulou, kdy začíná a končí kladná půlvlna. Vzhledem k derivaci ve Faradayově indukčním zákoně to ovšem znamená, že v těchto okamžicích nabývá magnetický tok svých extrémů, svého minima v čase t_1 a maxima v čase t_2. Efektivní hodnotu pak můžeme vypočítat na základě znalosti činitele tvaru indukovaného napětí jako $U = k_t U_s$. Předpokládejme, že byl magnetický tok např. harmonického tvaru. Pak je i indukované napětí harmonické, neboť derivace harmonické funkce je opět funkcí harmonickou. Pro efektivní hodnotu napětí pak dostáváme v praxi často užívaný vztah

$$U = k_{th} U_s = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} 4 fN\Phi_m = \pi\sqrt{2} fN\Phi_m \doteq 4.44 fN\Phi_m \ .$$

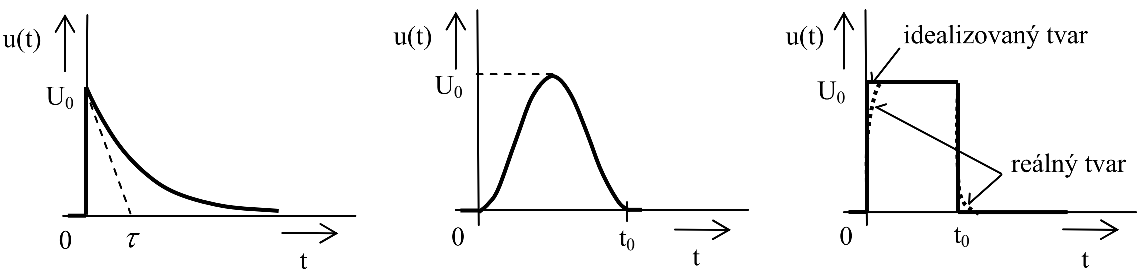
5.3 Neperiodické veličiny

Neperiodické časové průběhy vykazují obvody zejména při tzv. **přechodných jevech**, které nastávají po zapnutí či vypnutí napájecích zdrojů nebo při změně některého obvodového parametru. Zpravidla se jedná o různé druhy doznívajících průběhů exponenciálního typu či exponenciálně tlumené periodické průběhy, tzv. kvaziperiodické, vyjadřující přechod mezi původními a novými ustálenými stavy, viz příklady na **Obr. 5.7**.



Obr. 5.7: Příklady časových průběhů napětí přechodných jevů

Takovéto průběhy je možné plně popsat pouze jejich funkční závislostí v celém uvažovaném časovém intervalu. Dále se můžeme s neperiodickými průběhy setkat při buzení obvodů izolovanými impulsy, které mohou samy nabývat rozmanitých tvarů, jak ukazují příklady na **Obr. 5.8**: a) exponenciální impuls, b) impuls „sinus-kvadrát", c) obdélníkový impuls reálný a idealizovaný. Odezva v obvodu je pak opět veličinou neperiodickou.



Obr. 5.8: Příklady časových průběhů izolovaných impulsů

V případě, že je dobu trvání t_0 impulsu mnohem kratší, než je doba trvání odezvy příslušné obvodové veličiny, prakticky se neuplatňuje jeho tvar, ale uplatní se pouze jeho plocha. Ta se nazývá jako **mohutnost impulsu**. Např. pro mohutnost napěťového impulsu můžeme psát

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt \quad . \tag{5.15}$$

Rozsah integrace lze prakticky omezit podle konkrétního tvaru impulsu, viz ***Příklad 5.4***.

Příklad 5.4

Vypočtěte mohutnosti impulsů podle **Obr. 5.8**.

a) $u(t) = 0$ pro $t < 0$, $u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ pro $t \geq 0$, pak

$$H = \int_0^{\infty} U_0 e^{-t/\tau} = U_0 \left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^{\infty} = U_0 \tau \quad .$$

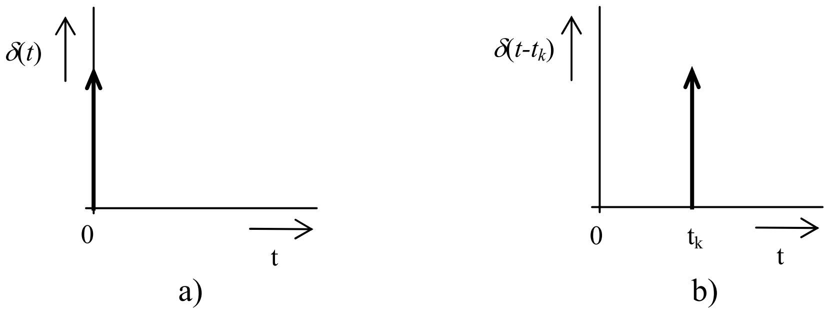
b) $u(t) = U_0 \sin^2 \dfrac{\pi}{t_0} t$ pro $0 \le t \le t_0$, $u(t) = 0$ vně tohoto intervalu, pak

$$H = \int_0^{t_0} U_0 \sin^2 \frac{\pi}{t_0} t dt = \frac{U_0}{2} \int_0^{t_0} (1 - \cos \frac{2\pi}{t_0} t) dt = \frac{U_0}{2} \left[t - \frac{t_0}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{t_0} t \right]_0^{t_0} = \frac{U_0 t_0}{2} .$$

c) $u(t) = U_0$ pro $0 \le t \le t_0$, $u(t) = 0$ vně tohoto intervalu, pak

$$H = \int_0^{t_0} U_0 dt = U_0 t_0 .$$

Při různých teoretických úvahách se často pracuje s impulsem, který je nekonečně krátký, tj. $t_0 \to 0$, ale který má mohutnost $H = 1$. Znamená to naopak, že jeho maximální hodnota je nekonečná. Jedná se o tzv. **jednotkový impuls** (Diracův impuls) $\delta(t)$, znázorňovaný graficky obvykle šipkou dle **Obr. 5.9**. Můžeme jej získat např. z obdélníkového impulsu na **Obr. 5.8c**, pokud zvolíme $U_0 = 1/t_0$ a provedeme limitní přechod $t_0 \to 0$, neboť pak bude $H = t_0/t_0 = 1$ pro každé t_0. Nastane-li jednotkový impuls v jiném než nulovém časovém okamžiku, např. v okamžiku t_k, zapisujeme to jako $\delta(t - t_k)$. Pro všechny časy $t \ne t_k$ je pak jeho hodnota nulová, pro $t = t_k$ nekonečná. Zřejmě se nejedná o funkci v obvyklém pojetí matematické analýzy, někdy se v této souvislosti hovoří o zobecněné funkci či o tzv. **distribuci**.

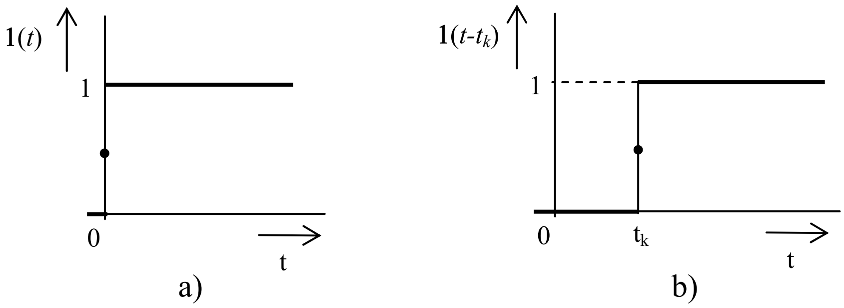


Obr. 5.9: Značení jednotkového (Diracova) impulsu

Pro teorii obvodů je velmi významný tzv. **jednotkový skok**, značený $\mathbf{1}(t)$. Je definovaný jako

$$\mathbf{1}(t) = 0 \text{ pro } t < 0 \text{ a } \mathbf{1}(t) = 1 \text{ pro } t > 0 . \qquad (5.16)$$

V bodě nespojitosti, tj. pro časový okamžik $t = 0$, se definuje pomocí aritmetického průměru limity zleva a zprava, což vede na $\mathbf{1}(0) = 1/2$. Pro praktické aplikace se však zpravidla vystačí s definicí dle (5.16). Pokud jednotkový skok nastal v nějakém obecném časovém okamžiku t_k, zapisujeme to jako $\mathbf{1}(t - t_k)$, kdy pro $t < t_k$ je jeho hodnota nulová, pro $t > t_k$ rovna jedné, viz **Obr. 5.10**.

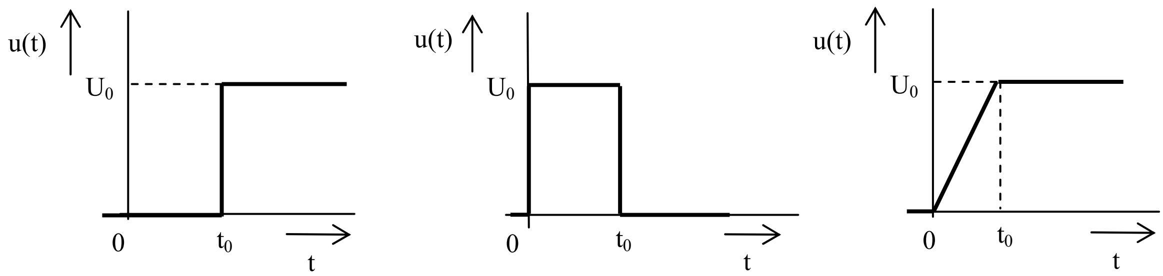


Obr. 5.10: Jednotkový skok a posunutý jednotkový skok

Jednotkový skok nalézá své uplatnění např. při analýze přechodných jevů v elektrických obvodech, která bude předmětem kurzu *Elektrotechnika 2*. Dají se jím totiž výhodně popsat veličiny, které podléhají v čase skokovým změnám (ve své velikosti nebo derivaci). Nejčastěji se využívá k popisu časových průběhů schodovitých funkcí (např. budicích impulsů), které lze považovat za superpozici posunutých jednotkových skoků, viz ***Příklad 5.5***.

Příklad 5.5:

Vyjádřete časový průběh skokových napětí a napětí rampového dle **Obr. 5.11**.



a) b) c)

Obr. 5.11: K příkladu aplikace jednotkového skoku

a) jedná se o prostý součin velikosti napětí U_0 a posunutého jednotkového skoku

$$u(t) = U_0 \mathbf{1}(t - t_0) \quad ,$$

b) zde se jedná o součin velikosti napětí U_0 a rozdílu dvou jednotkových skoků, prvního v základní poloze a druhého posunutého

$$u(t) = U_0[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - t_0)] \ ,$$

d) zde se jedná o rozdíl dvou lineárních funkcí času se směrnicí U_0/t_0, které jsou vůči sobě v čase posunuty o t_0, a jsou násobeny po řadě jednotkovým skokem v základní poloze a jednotkovým skokem posunutým

$$u(t) = \frac{U_0}{t_0}[t\mathbf{1}(t) - (t - t_0)\mathbf{1}(t - t_0)] \quad .$$

Pomocí jednotkových skoků lze výhodně matematicky popsat i např. šíření napěťových nebo proudových vln libovolného tvaru po ideálním (bezeztrátovém) vedení, není-li oboustranně přizpůsobeno a dochází tak na něm k vícenásobným odrazům. Roli časového posunutí zde pak hraje zpoždění na vedení, což je doba potřebná k průchodu vlny po jeho délce.

Jednotkového impulsu i jednotkového skoku se také používá jako standardních testovacích signálů, na které je zjišťována odezva obvodu. Hovoříme pak o **impulsové** nebo **přechodné charakteristice**, které daný obvod charakterizují z hlediska jeho přenosových vlastností. Při jejich znalosti lze např. vypočítat odezvu obvodu na vstupní signál libovolného tvaru, pomocí tzv. konvolučního integrálu. S uvedenou problematikou se podrobněji seznámíme až v rámci kurzu *Elektrotechnika 2*.

6 Příloha

Tab. 6.1: Vybrané veličiny v elektrotechnice a jejich jednotky

VELIČINA		**UŽÍVANÉ JEDNOTKY**		**ROZMĚR**
NÁZEV	**Zn.**	**NÁZEV**	**Zn.**	$m^x.kg^x.s^x.A^x$
Elektrický náboj	Q, q	coulomb, ampérsekunda	C, As	$s \cdot A$
Elektrický proud	$I,\ i$	ampér	A	A
Proudová hustota	$\vec{\mathbf{J}}$	ampér na metr čtvereční	Am^{-2}	$m^{-2} \cdot A$
Intenzita elektrického pole	$\vec{\mathbf{E}}$	volt na metr	Vm^{-1}	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Elektrický potenciál	φ	volt	V	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Elektrické napětí	U, u	volt	V	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Elektrický odpor	R	ohm	Ω	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Měrný elektrický odpor	ρ	ohmmetr	Ωm	$m^3 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Elektrická vodivost	G	siemens	S	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Měrná elektrická vodivost	γ, σ	siemens na metr	Sm^{-1}	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Impedance (pro harm. proud)	$\mathbf{Z}$	ohm	Ω	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Admitance (pro harm. proud)	$\mathbf{Y}$	siemens	S	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Výkon elektrického proudu	P, p	watt	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Práce elektrického proudu	A	joule, wattsekunda	J, Ws	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Elektrická indukce	$\vec{\mathbf{D}}$	coulomb na metr čtvereční	Cm^{-2}	$m^{-2} \cdot s \cdot A$
Permitivita	ε	farad na metr	Fm^{-1}	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Kapacita	C	farad	F	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Magnetická indukce	$\vec{\mathbf{B}}$	tesla	T	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Magnetický indukční tok	Φ	weber, voltsekunda	Wb, Vs	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Intenzita magnetického pole	$\vec{\mathbf{H}}$	ampér na metr	Am^{-1}	$m^{-1} \cdot A$
Permeabilita	μ	henry na metr	Hm^{-1}	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Magnetomotorické napětí	F_m	ampér	A	A
Vlastní indukčnost	L	henry	H	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Vzájemná indukčnost	M	henry	H	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Frekvence	f	hertz	Hz	s^{-1}
Úhlová frekvence	ω	radián za sekundu	$rad \cdot s^{-1}$	s^{-1}

Tab. 6.2: Násobné a dílčí předpony

Název	**Označení**	**Násob. 10^x**
tera	T	12
giga	G	9
mega	M	6
kilo	k	3
mili	m	-3
mikro	μ	-6
nano	n	-9
piko	p	-12

Tab. 6.3: Vybrané fyzikální konstanty

permeabilita vakua	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, Hm^{-1}$
permitivita vakua	$\varepsilon_0 = 8.854188 \cdot 10^{-12}\, Fm^{-1}$
elementární náboj	$e = 1.602177 \cdot 10^{-19}\, C$
Boltzmannova konstanta	$k = 1.380658 \cdot 10^{-23}\, JK^{-1}$
Planckova konstanta	$h = 6.6260755 \cdot 10^{-34}\, Js$
rychlost světla ve vakuu	$c = 2.99792458 \cdot 10^8\, ms^{-1}$
standardní teplota	$T_s = 273.15K \quad (= 0^\circ C)$

Literatura

[1] Valsa J., Sedláček J.: Teoretická elektrotechnika I. Skriptum VUT v Brně. 1997

[2] Mikulec M., Havlíček V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT v Praze. 1997

[3] Biolek D., Hájek K., Viktorin J.: Úvod do elektrotechniky. Skriptum VA v Brně. 1997

[4] Murina M.: Teorie obvodů. Skriptum VUT v Brně. 1997

[5] Brančík L., Veselý M., Zapletal Z.: Teoretická elektrotechnika I – Sbírka příkladů. Skriptum VUT v Brně. 2001

[6] Smékal Z., Veselý L.: Základy elektrotechniky – Sbírka příkladů. Skriptum VA v Brně, 2000

[7] Bauer M.: Základy elektrotechniky. Skriptum VUT v Brně. 1979

[8] Čajka J., Kvasil J.: Teorie lineárních obvodů. SNTL/Alfa, Praha, 1979

[9] Mayer D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/Alfa, Praha, 1978

[10] Vlach J.: Basic Network Theory with Computer Applications. Van Nostrand Reinhold, New York, 1992

[11] Kaláb P., Steinbauer M., Veselý M.: Bezpečnost v elektrotechnice. Skriptum VUT v Brně. 2003