FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

ELEKTROTECHNIKA II

Garant předmětu:
Doc. Ing. Jiří Sedláček, CSc.

Autoři textu:
Doc. Ing. Jiří Sedláček, CSc.
Prof. Ing. Juraj Valsa, CSc.

Seznam obrázků

SEZNAM TABULEK

1 Úvod

Předložený studijní materiál slouží jako základní studijní materiál distanční formy studia předmětu Elektrotechnika 2, který navazuje na předmět Elektrotechnika 1 a spolu s ním vytváří nezbytně nutné teoretické základy společné pro všechny elektrotechnické obory, které jsou potřebné pro studium předmětů specializací v dalších ročnících studia.

2 Zařazení předmětu ve studijním programu

Předmět Elektrotechnika 2 je zařazen ve druhém semestru prvního ročníku bakalářského studia jako jeden ze základních teoretických předmětů společných pro všechny elektrotechnické obory. Spolu s dalšími základními předměty pomáhá vytvářet potřebný teoretický základ nezbytný pro další studium předmětů specializací . Předmět Elektrotechnika 2 navazuje bezprostředně na předmět Elektrotechnika 1, který je zařazen v 1. semestru studia a tvoří druhou část tohoto základního elektrotechnického předmětu vytvářejícího potřebné teoretické základy. Rozvíjí, prohlubuje a rozšiřuje základní znalosti získané v první části předmětu.

Navazuje na znalosti základních zákonů elektrotechniky a základních metod řešení lineárních obvodů v ustáleném stejnosměrném stavu. Rozšiřuje znalosti na metody analýzy jednofázových a vícefázových lineárních obvodů v harmonickém ustáleném stavu. Seznamuje s nejdůležitějšími lineárními obvody prvního a druhého řádu a s jejich vlastnostmi a možnostmi jejich využití v běžné elektrotechnické praxi. Dává základy metod řešení přechodných dějů v lineárních obvodech prvního a druhého řádu. Seznamuje také s nezbytně nutnými znalostmi řešení lineárních obvodů s rozprostřenými parametry., které dnes.

2.1 Úvod do předmětu

Předmět Elektrotechnika 2 navazuje na znalosti získané v první části předmětu (Elektrotechnika 1), rozšiřuje je a prohlubuje. První kapitola předmětu (kap.3.) seznamuje s chováním základních lineárních prvků v obvodech harmonického ustáleného stavu a s metodami analýzy jednofázových lineárních obvodů v harmonickém ustáleném stavu. Seznamuje s nejdůležitějšími lineárními obvody (RC, RL, RLC) prvního a druhého řádu a s jejich vlastnostmi a možnostmi využití v běžné elektrotechnické praxi. Následující kapitola (4.kap) se zabývá základy vícefázových (zejména trojfázových) obvodů a metodami analýzy souměrných i nesouměrných vícefázových obvodů. V další kapitole (kap.5.) jsou vyloženy metody analýzy přechodných dějů v lineárních obvodech. Objasněna je klasická metoda i metoda Laplaceovy transformace, vysvětleny jsou základní vlastnosti obvodů z hlediska přechodných i impulsních charakteristik obvodů. Závěrečná část (kap.6.) dává nezbytně nutné základy pro analýzu obvodů s rozprostřenými parametry. Zabývá se základními vlastnostmi těchto obvodů, jejichž využití se v dnešní době stále více rozšiřuje, v časové i kmitočtové oblasti.

Osvojení poznatků uvedených kapitol dává základy pro pochopení činnosti analogových i impulsních obvodů. Umožňuje analyzovat lineární obvody z hlediska ustáleného stavu stejnosměrného a harmonického, umožňuje sledovat chování těchto obvodů i při řešení přechodných dějů. Zvládnutí předloženého obsahu vytváří potřebné teoretické základy pro zvládnutí dalšího studia předmětů navazujících specializací.

2.2 Vstupní test

Vstupní test je určen k vyhodnocení samotným studentem a jeho účelem je ověření předchozích znalostí studenta, potřebných k úspěšnému zvládnutí studia předkládaného výukového textu.

Příklad 2.2-1

Vypočtěte x :

a) x = sin (25°), b) x=sin (1,25) ,c) x= cos(35°), d) x=sin(- 30°), e) x= cos (132°)

Příklad 2.2-2

Vypočtěte α :

a) 0,25 = sinα, b) 0,8 = cosα c) –0,9 = cosα, d) –0,6 = sinα, e) –0,2 = cosα

Příklad 2.2-3

Vypočtěte derivace funkcí:

a) y = sin x, b) y = cos x ,c) $y = e^{x}$, d) $y = e^{ax}$, e) $y = 2x^{3}$, f) $y = ax^{n+1}$

Příklad 2.2-4

Vypočtěte neurčitý integrál funkcí:

a) y = sin x, b) y = cos x ,c) $y = e^{x}$, d) $y = e^{2x-1}$, e) $y = 2x^{3}$, f) $y = e^{ax+b}$

Příklad 2.2-5

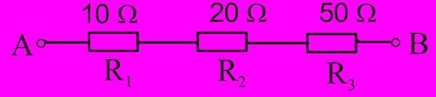
a) Definujte číslo e , vyčíslete jeho hodnotu ,b) definujte imaginární jednotku j , c) doplňte Eulerův vztah e^{jx} =

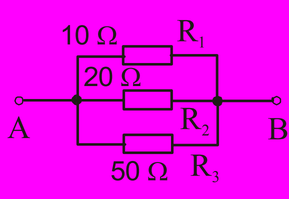
Příklad 2.2-6

Komplexní číslo **A** = 2 +j3 převeďte: a) do exponenciálního, b) do goniometrického tvaru

Příklad 2.2-7

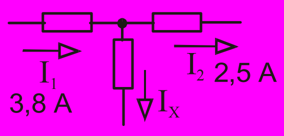
a) Nahraďte v obrázcích větve mezi uzly A a B jedním rezistorem, vypočtěte jejich hodnoty

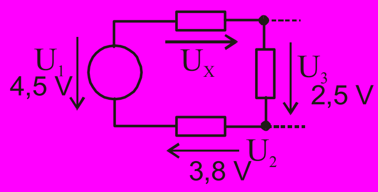




Příklad 2.2-8

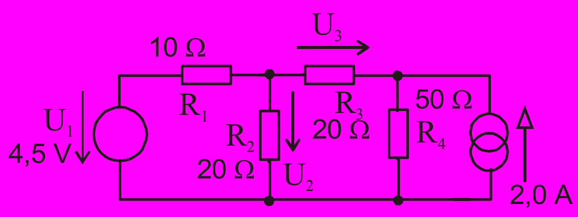
a) V obvodech na obrázku vypočtěte pomocí I.Kirchhoffova zákona proud Ix, pomocí II. Kirchhoffova zákona napětí Ux :





Příklad 2.2-9

a) V obvodu na obrázku vypočtěte napětí U_2 a U_3 metodou smyčkových proudů i metodou uzlových napětí



Příklad 2.2-10

a) Efektivní hodnota napětí je U=230 V, jaká je hodnota amplitudy U_m ?

b) Amplituda proudu je I_m =0,5 A, jaká je efektivní hodnota proudu I ?

Příklad 2.2-11

Vypočtěte x :

a) $x^2 + 2x - 6 = 0$, b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ c) $x^2 + 2.10^5 + 1{,}01.10^{12} = 0$

Příklad 2.2-12

Vypočtěte y :

a) $y = e^{0,35}$, b) $y = e^{-0,456}$, c) $0{,}6065 = e^y$

Příklad 2.2-13

Vypočtěte parciální derivace :

a) $\frac{\partial}{\partial t}\left[ax^2 + t^2\right]$, b) $\frac{\partial}{\partial x}\left[ax^2 + bt^2\right]$, c) $\frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2 t + 3t^2\right]$, d) $\frac{\partial}{\partial t}\left[2x^2 t + 5t^2\right]$

3 Harmonický ustálený stav

Cíle kapitoly: Seznámení s chováním základních obvodových prvků (lineárních rezistorů, kapacitorů a induktorů) v obvodech harmonického ustáleného stavu. Osvojení symbolické metody analýzy lineárních obvodů v harmonickém ustáleném stavu. Seznámení se základními vlastnostmi jednoduchých obvodů prvního a druhého řádu složených z lineárních rezistorů, kapacitorů a induktorů používaných běžně v elektrotechnické praxi.

Test předchozích znalostí

Zde jsou uvedené testové příklady, jejichž znalost je nutná pro pochopení textu. Správné odpovědi na testové příklady jsou uvedeny v dodatcích – odstavec výsledky testů

Příklad 3 - 1

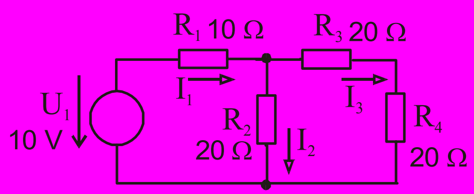
Komplexní číslo **A** = 5 +j3 převeďte: a) do exponenciálního, b) do goniometrického tvaru

Příklad 3 - 2

Komplexní číslo **B** = 15 $e^{j40°}$ převeďte: a) do složkového, b) do goniometrického tvaru

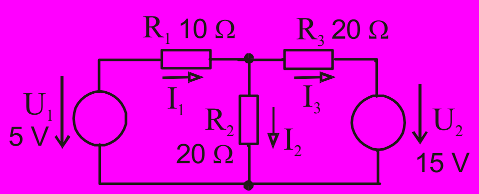
Příklad 3 - 3

a) V obvodu na obrázku vypočtěte proudy I_1, I_2 a I_3 metodou zjednodušování a metodou úměrných veličin



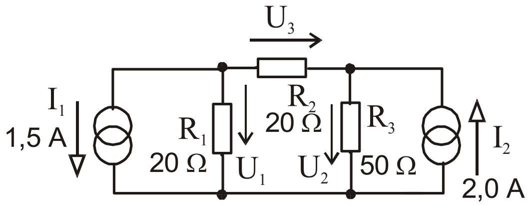
Příklad 3 - 4

a) V obvodu na obrázku vypočtěte proudy I_1, I_2 a I_3 metodou smyčkových proudů



Příklad 3 - 5

a) V obvodu na obrázku vypočtěte napětí U_1,U_2 a U_3 metodou uzlových napětí

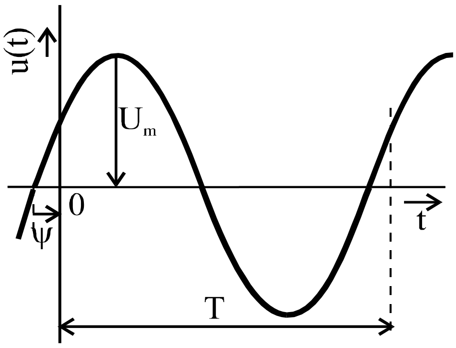


3.1 Úvod

V lineárních obvodech, které jsou buzeny zdroji harmonického napětí a proudu stejného dochází po odeznění přechodných dějů vyvolaných připojením zdrojů k **ustálenému harmonickému stavu**. Tento režim, při kterém všechny obvodové veličiny (napětí i proudy) mají harmonický časový průběh s konstantní amplitudou, je pro elektrotechniku velmi významný. Výhodné vlastnosti harmonických napětí a proudů využívá převážná část oborů zabývajících se výrobou, rozvodem a užitím elektrické energie, využívány jsou i v oblastech sdělovací a měřicí techniky. Harmonický ustálený stav má mimořádný význam i z hlediska analýzy elektrických obvodů.

3.2 Harmonicky proměnné veličiny

Harmonicky proměnnou veličinu (napětí, proud) je možno popsat pomocí funkce sinus nebo kosinus. Okamžitou hodnotu časového průběhu harmonického napětí s periodou T (obr.3.2 - 1) můžeme např. psát :



$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \ , \qquad (3.2 – 1)$$

kde U_m je amplituda (maximální hodnota) [V],

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ úhlový kmitočet [rad/s],

$\omega t + \psi$ fáze [rad],

ψ počáteční fáze [rad].

Stejný průběh můžeme rovnocenným způsobem popsat

Obrázek 3.2.1 Harmonické napětí

pomocí funkce kosinus

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi') = U_m \cos(\omega t + \psi - \pi/2). \qquad (3.2 – 2)$$

3.3 Symbolický počet

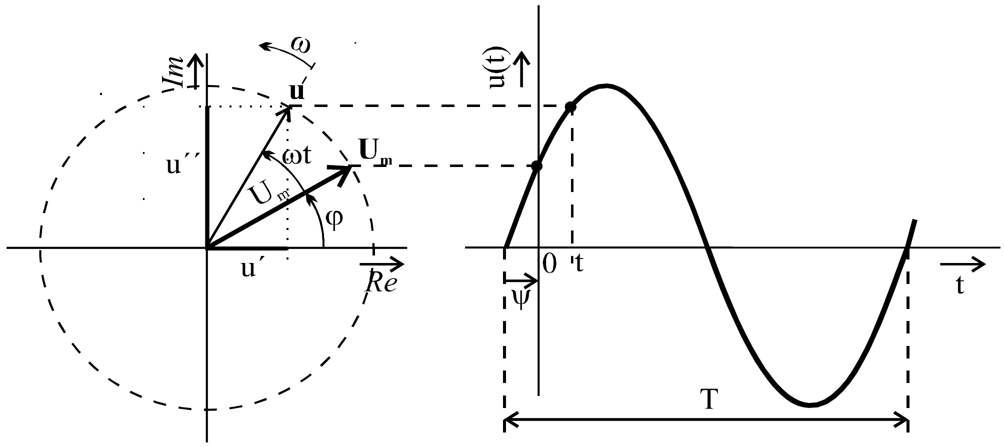
Jestliže necháme v komplexní rovině rotovat vektor (představující například napětí) rovnoměrným kruhovým pohybem, jeho průmět do svislé (tj. imaginární) osy reprezentuje harmonicky proměnný průběh (obr.3.2 - 1), který je popsán vztahem (3.2 –1). Využití těchto rotujících vektorů přináší značné zjednodušení zejména při analýze elektrických obvodů v harmonickém ustáleném stavu. Vzájemné postavení vektorů nám velmi názorně ukazuje fázové poměry mezi napětími a proudy. Ty jsou však fyzikálně skalárními veličinami, proto se tyto rotující vektory v elektrotechnice nazývají **fázory** .

Rotující fázor **u**(t) , který může (svým průmětem) zastupovat okamžitou hodnotu skutečné harmonicky proměnné veličiny, se nazývá **komplexní okamžitou hodnotou** nebo též **komplexorem**. Modul této komplexní veličiny je roven amplitudě U_m a argument je roven fázi ($\omega t+\psi$). Reálnou složku komplexoru (jeho průmět do reálné osy) u' a imaginární složku komplexoru (jeho průmět do imaginární osy) u'' můžeme psát jako

$$u' = \mathrm{Re}\{\mathbf{u}(t)\} = U_m \cos(\omega t + \psi), \quad u'' = \mathrm{Im}\{\mathbf{u}(t)\} = U_m \sin(\omega t + \psi). \quad (3.3-1),\ (3.3-2)$$

V souladu s Eulerovým vztahem můžeme proto rotující fázor zapsat

$$\mathbf{u}(t) = u' + j\,u'' = \mathbf{U}_m.e^{j\omega t} = U_m.e^{j\psi}.e^{j\omega t} = U_m.e^{j(\omega t+\psi)} \quad . \qquad (3.3-3)$$



Obrázek 3.3.1 Harmonické napětí a rotující fázor

Důležitější než okamžitá hodnota je pro praxi amplituda a počáteční fáze sledované veličiny, kterou vyjadřuje **fázor** v měřítku **amplitudy**

$$\mathbf{U}_m = U_m.e^{j\psi} \quad . \qquad (3.3-4)$$

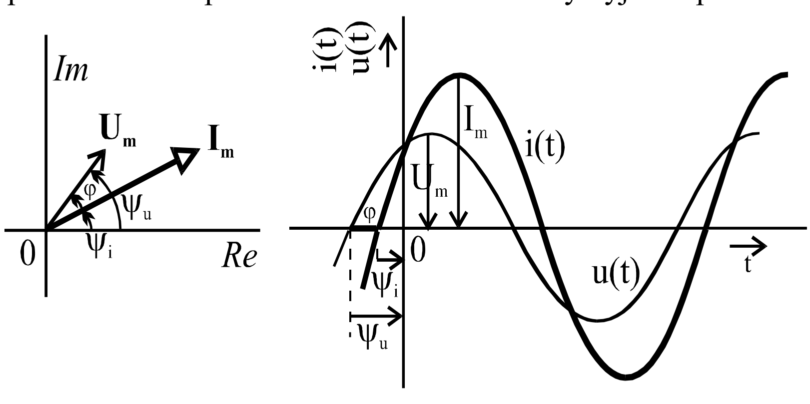
Jak je z obr.3.3 - 1 vidět, je tento fázor totožný s rotujícím fázorem v okamžiku t = 0 . V elektrotechnických aplikacích často pracujeme s efektivními hodnotami veličin, proto zavádíme fázor i v měřítku efektivních hodnot. Pro **fázor** v měřítku **efektivní hodnoty** napětí tak můžeme psát

$$\mathbf{U} = U.e^{j\psi} . \qquad (3.3-5)$$

Velikost jeho modulu je potom rovna efektivní hodnotě $U = U_m / \sqrt{2}$.

V komplexní rovině obvykle zobrazujeme více fázorů najednou. Takové zobrazení nazýváme **fázorovým diagramem**. Příklad fázorového diagramu, ze kterého je názorně vidět fázový posun mezi napětím a proudem $\varphi = \psi_u - \psi_i$, je na obr. 3.3 -2a. Jak je z obrázku patrné, fázory $\mathbf{U_m}$ a $\mathbf{I_m}$ nám jako **symboly** v komplexní rovině představují amplitudy a fáze skutečných veličin obvodu, které jsou zobrazeny pomocí časových diagramů na obr.3.3 -2b.

Fázory jsou používány jako symboly, které při analýze zastupují skutečné fyzikální veličiny. Proto bývá označována tato metoda analýzy také jako **symbolická metoda**. Při matematických operacích v komplexní rovině můžeme fázory vyjádřit pomocí komplexních



Obrázek 3.3.2 Fázorový diagram **Obrázek 3.3.3 Časové průběhy**

čísel. Nejdůležitější pravidla pro základní operace s fázory jsou shodná s pravidly komplexního počtu a stručně je zopakujeme v následujícím odstavci.

Poznámka:

Rotující fázor (komplexor) budeme v textu označovat malým tučným písmenem **u**(t), **i**(t), fázory velkým tučným písmenem **U**, **I** ,$\mathbf{U}_m$, $\mathbf{I}_m$. Jejich absolutní velikosti (moduly) budeme označovat velkou kurzivou tedy U_m , I_m. Při manuálním zápisu fázorů se fázory označují velkými písmeny s pomocnými znaky (například stříškou nad písmenem $\hat{U}$).

3.3.1 Základní operace symbolického počtu

Základní operace s harmonicky časově proměnnými veličinami můžeme převést na podstatně jednodušší operace s fázory v komplexní rovině. Fázor vyjádřený komplexním číslem můžeme vyjádřit ve **složkovém** tvaru

$$\mathbf{U} = u' + j\,u'', \tag{3.3 - 6}$$

kde u' a u'' jsou reálná a imaginární složka komplexního čísla, j $=\sqrt{-1}$ je imaginární jednotka. Jak je vidět z obr.3.3-3, pro jednotlivé složky fázoru platí

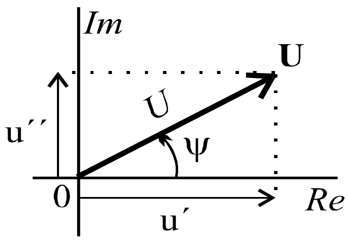
$$u' = U\cos\psi, \qquad u'' = U\sin\psi. \tag{3.3 - 7}$$

Modul fázoru (absolutní hodnotu, velikost) určíme jako

$$U = \sqrt{u'^2 + u''^2}\ . \tag{3.3 - 8}$$

Pro argument komplexního čísla platí

$$\psi = \text{arctg}\,[\text{Im}(\mathbf{U}) / \text{Re}(\mathbf{U})] = \text{arctg}\,(u''/ u')\ . \tag{3.3 - 9}$$



Argument (úhel) ψ vyjadřujeme v radiánech, ale při numerických výpočtech se v elektrotechnické praxi často setkáváme i s vyjádřením úhlu ve stupních.

Přitom úhel ve stupních (jako číslo v desítkové soustavě s desetinami a setinami stupně) získáme z úhlu v radiánech vynásobením konstantou 180 /π = 57,2958.

Obrázek 3.3.4 Fázor

Při výpočtu argumentu je nutno brát v úvahu, ve kterém kvadrantu komplexní roviny komplexní číslo leží. Pokud je $u' > 0$, hodnota argumentu je dána výrazem (3.3 - 9) a může se pohybovat v intervalu $(-\pi/2, +\pi/2)$. Je-li $u' = 0$, číslo je čistě imaginární, $\mathbf{U} = ju''$ a $\psi = +\pi/2$ pro $u'' > 0$ a $\psi = -\pi/2$ pro $u'' < 0$. Je-li reálná část komplexního čísla záporná, fázor leží ve 2. nebo 3. kvadrantu. Je-li dále $u'' > 0$ (2. kvadrant), platí

$$\psi = \pi - arctg(u''/u'), \tag{3.3 - 10}$$

je-li $u'' < 0$ (3. kvadrant), pak

$$\psi = -\pi + arctg(u''/u'). \tag{3.3 - 11}$$

Poznámka:

Kalkulátory, které dovolují pracovat s komplexními čísly, převod mezi oběma formami čísla obvykle provádějí s ohledem na znaménka reálné a imaginární části. Je však vhodné se o správnosti postupu přesvědčit a zvláštnosti práce kalkulátoru na praktických příkladech ověřit.

Z Eulerova vztahu vyplývá druhý, tzv. **exponenciální (polární) tvar** komplexního čísla

$$\mathbf{U} = U.e^{j\psi}, \qquad (3.3 - 12)$$

ve kterém je přímo obsažena nejdůležitější informace o modulu a argumentu čísla.
Pro jednoduchost se někdy používá tzv. Kennelyho zápisu

$$\mathbf{U} = U\angle\psi \qquad (3.3 - 13)$$

(čte se "verzor ψ"). Zde je přípustné psát úhel i ve stupních.

Příklady zápisu komplexních čísel a jejich převodu ze složkového na polární tvar:

$\mathbf{U}_1 = 3 + j4 = 5e^{j0,9273} = 5\angle 53,13°$, $\mathbf{U}_3 = -3 - j4 = 5e^{-j2,2143} = 5\angle -126,87°$,

$\mathbf{U}_2 = -3 + j4 = 5e^{j2,2143} = 5\angle 126,87°$, $\mathbf{U}_4 = 3 - j4 = 5e^{-j0,9273} = 5\angle -53,13°$,

$\mathbf{U}_5 = j3 = 3e^{j\pi/2} = 3\angle 90°$, $\mathbf{U}_7 = -3 = 3e^{j\pi} = 3e^{-j\pi} = 3\angle 180° = 3\angle -180°$,

$\mathbf{U}_6 = -j3 = 3e^{-j\pi/2} = 3\angle -90°$, $\mathbf{U}_8 = 3 + j0 = 3e^{j0} = 3\angle 0° = 3$.

Sčítání a odčítání
Sčítání a odčítání fázorů resp. obecně komplexních čísel uplatníme například při řešení rovnic plynoucích z Kirchhoffových zákonů. V grafickém vyjádření (obr.3.3 - 4) připomíná součet nebo rozdíl vektorů. Je při něm výhodné pracovat se složkovým tvarem komplexního čísla.
Je-li $\mathbf{U}_1 = u_1' + ju_1''$, $\mathbf{U}_2 = u_2' + ju_2''$, pak

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \pm \mathbf{U}_2 = u' + ju'' = (u_1' \pm u_2') + j(u_1'' \pm u_2''). \qquad (3.3 - 14)$$

Slučujeme (sečítáme, odečítáme) tedy zvlášť reálné a zvlášť imaginární části čísel.
Máme-li jednotlivá komplexní čísla v polárním tvaru, můžeme jejich součet nebo rozdíl vypočítat přímo z modulů a argumentů. Pro výsledný modul pak platí podle kosinové věty

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 \pm 2U_1U_2\cos(\psi_1 - \psi_2)} \qquad (3.3 - 15)$$

a pro argument (viz obr.3.3-4)

$$tg\psi = \frac{u''}{u'} = \frac{u_1'' \pm u_2''}{u_1' \pm u_2'} = \frac{U_1\sin\psi_1 \pm U_2\sin\psi_2}{U_1\cos\psi_1 \pm U_2\cos\psi_2}. \qquad (3.3 - 16)$$

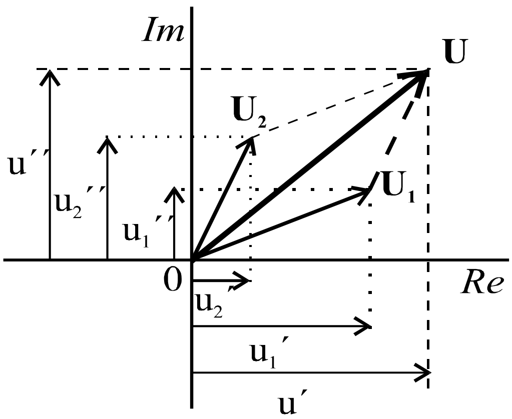
Násobení a dělení
komplexních čísel se využívá při výpočtech na základě zobecněného Ohmova zákona, jak bude vysvětleno v podkapitole 3.4. Máme-li komplexní čísla

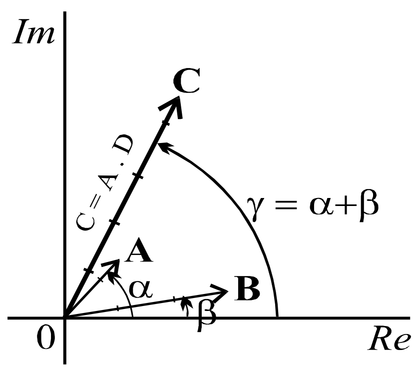
$$\mathbf{A} = a' + ja'' = Ae^{j\alpha}, \quad \mathbf{B} = b' + jb'' = Be^{j\beta},$$

pak jejich **součin** snadno získáme použitím exponenciálních tvarů

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{B} = Ce^{j\gamma} = ABe^{j(\alpha+\beta)} \qquad (3.3 - 17)$$

Modul součinu je roven součinu modulů a argument součtu argumentů jednotlivých součinitelů, jak je vidět na obr.3.3-4a. Uvedený postup platí i pro součin libovolného počtu





Obrázek 3.3.5 Součet fázorů **Obrázek 3.3.6 Součin fázorů**

komplexních čísel. Ve zvláštním případě pak při násobení komplexního čísla imaginární jednotkou

$$\mathbf{C} = j\mathbf{A} = \mathbf{A}e^{j\pi/2} = Ae^{j(\alpha+\pi/2)} \quad , \qquad (3.3 - 18)$$

modul se nemění, ale argument vzroste o $\pi/2$.

Násobíme-li komplexní číslo reálnou zápornou jednotkou (změníme znaménko před číslem)

$$\mathbf{C} = -\mathbf{A} = \mathbf{A}e^{\pm j\pi} = Ae^{j(\alpha \pm j\pi)}, \qquad (3.3 - 19)$$

modul opět zůstane nezměněn, argument se však změní (vzroste nebo klesne) o π.

Modul **podílu komplexních čísel**

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{A}{B}e^{j(\alpha-\beta)} \qquad (3.3 - 20)$$

je roven podílu jejich modulů a argument je roven rozdílu jejich argumentů. Dělíme-li komplexní číslo imaginární jednotkou, je výsledek stejný jako když násobíme *–j*. Podle definice imaginární jednotky je totiž

$$\frac{1}{j} = -j, \text{ tj. } j^2 = -1$$

Operace násobení a dělení lze provádět i s čísly ve složkovém tvaru. Je to však složitější:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{B} = (a' + ja'').(b' + jb'') = (a'b' - a''b'') + j(a'b'' + a''b') = c' + jc'', \qquad (3.3 - 21)$$

Obr.3.3 –4 Součet a rozdíl fázorů Obr.3.3 -4a Součin a podíl fázorů

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{a' + ja''}{b' + jb''} = \frac{(a'b' + a''b'') + j(a''b' - a'b'')}{b'^2 + b''^2} = d' + jd'' \ . \qquad (3.3 - 22)$$

Při praktických výpočtech vždy musíme uvážit, ve kterém tvaru bude dané operace výhodnější provádět.

Derivace a integrace

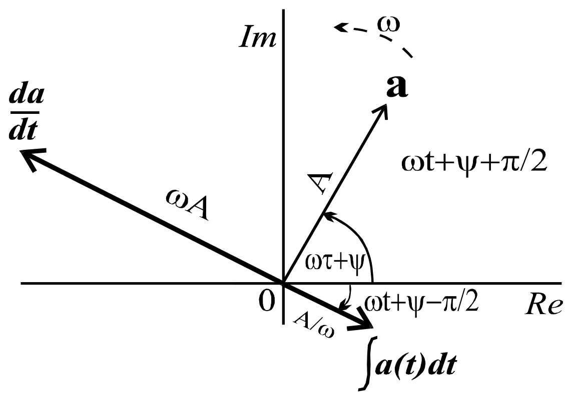
harmonických veličin podle času se v symbolickém počtu převádí na prosté násobení resp. dělení příslušného komplexoru činitelem $j\omega$ (obr.3.3-5).

Je-li například komplexní okamžitá hodnota proudu

$$\mathbf{i}(t) = I_m e^{j(\omega t+\psi)} = \mathbf{I}_m e^{j\omega t}, \qquad (3.3 - 23)$$

pro její derivaci podle času můžeme psát

$$\frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} = j\omega \mathbf{I}_m e^{j\omega t} = j\omega\, \mathbf{i}(t). \qquad (3.3 - 24)$$



Výsledný fázor získáme tedy vynásobením fázoru proudu $\mathbf{I}_m$ faktorem $j\omega$.

Velikost modulu ω - krát vzroste, argument se zvětší o $\pi/2$ (fázor se pootočil o $\pi/2$ v kladném smyslu, tj.proti směru otáčení hodinových ručiček).

Podobně **integrací** podle času (s nulovou integrační konstantou) dostaneme

$$\int \mathbf{i}(t)dt = \mathbf{I}_m \int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega}\mathbf{I}_m e^{j\omega t} =$$

$$= \frac{1}{j\omega}\mathbf{i}(t) \quad . \qquad (3.3 - 25)$$

Výsledný fázor získáme dělením fázoru **Obrázek 3.3.7 Derivace a integrace** proudu I_m faktorem $j\omega$. Modul dělíme kruhovým kruhovým kmitočtem ω, argument zmenšíme o $\pi/2$ (fázo r se pootočil o $\pi/2$
v záporném smyslu).

Na základě uvedených vztahů a pravidel pro operace s fázory je možno všechny operace s harmonickými veličinami, s nimiž se při analýze harmonického stavu setkáme, převést na podstatně jednodušší operace s fázory. Je přitom však třeba mít stále na mysli, že toto vyjádření harmonické veličiny imaginární částí komplexoru je symbolické a představuje určitou transformaci, která platí pouze pro lineární obvody při stejném kmitočtu všech obvodových veličin.

Příklad 3.3 –1 :

Vyjádřete harmonické napětí s časovými průběhy $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$,

pro $u_1(t) = 50\sin(314\,t + 0{,}2)$ [V] a $u_2(t) = 20\sin(314\,t + 0{,}8)$ [V] pomocí fázorů a najděte časový průběh součtového napětí.

Fázory obou napětí v měřítku amplitud jsou

$$\mathbf{U}_{m1} = U_{m1}.e^{j\psi_1} = 50.e^{j0,2} = 49{,}00 + j\,9{,}93 \ \text{[V]} \ ,$$

$$\mathbf{U}_{m2} = U_{m2}.e^{j\psi_2} = 20.e^{j0,9} = 12{,}43 + j\,15{,}67 \ \text{[V]} \ .$$

Výsledné součtové napětí pak můžeme psát

$\mathbf{U}_m = \mathbf{U}_{m1} + \mathbf{U}_{m2} = 49{,}00 + j\,9{,}93 + 12{,}43 + j\,15{,}67 = 61{,}43 + j25{,}60 = 66{,}55.e^{j0,39}$ [V] .

Jeho okamžitá hodnota $u(t) = \mathrm{Im}\{\mathbf{u}(t)\} = U_m \sin(\omega t + \psi) = 66{,}55 \sin(314\,t + 0{,}39)$ [V] .

Příklad 3.3 -2

Časový průběh proudu cívky o indukčnosti L =1H je dán vztahem

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = 0{,}2\sin(314t - 0{,}3)$ [A] . Určete časový průběh napětí na cívce, je-li obvod v harmonickém ustáleném stavu.

Rotující fázor (komplexor) proudu je $\mathbf{i}(t) = I_m.e^{j(\omega t+\psi)} = 0{,}2.e^{j(314t-0,3)}$ [A] .

Napětí indukované na cívce je možno psát $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$. V souladu se vztahem (3.3 – 24) můžeme komplexor napětí vyjádřit jako

$$\mathbf{u}(t) = L\frac{d}{dt}\mathbf{i}(t) = L\frac{d}{dt}[I_m.e^{j(\omega t+\psi)}] = L\frac{d}{dt}[0{,}2.e^{j(314t-0,3)}] = j\omega L\,\mathbf{i}(t) =$$

$$= j\,314.\ 0{,}2.e^{j(314t-0,3)} = j\,62{,}8.e^{j(314t-0,3)} = 62{,}8.e^{j(314t-0,3+\pi/2)} = 62{,}8.e^{j(314t+1,27)} .$$

Časový průběh napětí indukovaného na cívce je tedy

$$u(t) = \mathrm{Im}\{\mathbf{u}(t)\} = U_m \sin(\omega t + \psi) = 62{,}8 \sin(314\,t + 1{,}27) \ \text{[V]} \ .$$

3.3.2 Shrnutí podkapitoly 3.3

Fázor je symbolickým vyjádřením harmonicky proměnné veličiny (napětí, proud). Vyjadřuje pomocí komplexního čísla základní parametry - **velikost amplitudy** nebo efektivní hodnoty (modul komplexního čísla) a **fázi** (fáze komplexního čísla) harmonicky proměnné veličiny. Kmitočet se přitom předpokládá u všech harmonických veličin shodný. Všechny operace s harmonicky proměnnými veličinami se pomocí symbolického počtu převádějí na podstatně jednodušší operace s fázory vyjádřenými **komplexními čísly**.

Při součtu fázorů je třeba použít jejich vyjádření ve složkovém tvaru, součin a podíl je výhodné realizovat s fázory v polárním tvaru (je možné ale použít i složkového tvaru). Derivace a integrace harmonických veličin podle času představuje v symbolickém počtu prosté náso.bení, respektive dělení odpovídajících fázorů operátorem jω.

3.3.3 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 3.3

Příklad 3.3 –3:

Převeďte fázory napětí a proudu do polárního tvaru:

a) $\mathbf{U_1}$ = 5+j6 [V], b) $\mathbf{U_2}$ = 4,3 – j2,8 [V], c) $\mathbf{I_1}$ = 10,5 + j 4,8 [A], d) $\mathbf{I_2}$ = 2,3 – j 1,5 [A]

Příklad 3.3 –4:

Převeďte fázory napětí a proudu do složkového tvaru:

a) $\mathbf{U_1}$ = 5,6 $e^{j0,25}$ [V], b) $\mathbf{U_2}$ = 20 $\angle 50°$ [V], c) $\mathbf{I_1}$ = 4,2 $\angle 90°$ [A], d) $\mathbf{I_2}$ = 2,5 $\angle -35°$ [A]

Příkl.ad 3.3 –5:

Vyjádřete harmonické napětí s časovými průběhy $u\,(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$,

pro $u_1(t) = 50\sin\,(314\;t + 0{,}2)$ [V] a $u_2\,(t) = 20\,\sin\,(314\;t + 0{,}8)$ [V] pomocí fázorů a najděte časový průběh rozdílového napětí.

Příklad 3.3 –6:

Časový průběh proudu cívky o indukčnosti L =2H je dán vztahem

i(t) = $I_m \sin(\omega t + \psi) = 0{,}5\sin(314\,t - 0{,}2)$ [A] . Určete časový průběh napětí na cívce, je-li obvod v harmonickém ustáleném stavu.

3.4 Základní obvodové prvky v harmonickém ustáleném stavu

Pro základní pasivní prvky zapojené v obvodu, ve kterém je ustálený harmonický stav, určíme postupně vztahy mezi amplitudami napětí a proudu a jejich vzájemný fázový posun $\varphi = \psi_u - \psi_i$. Ukážeme i vzájemné vztahy mezi odpovídajícími fázory.

Předpokládáme, že známe proud tekoucí prvkem

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)\,. \qquad (3.4 - 1)$$

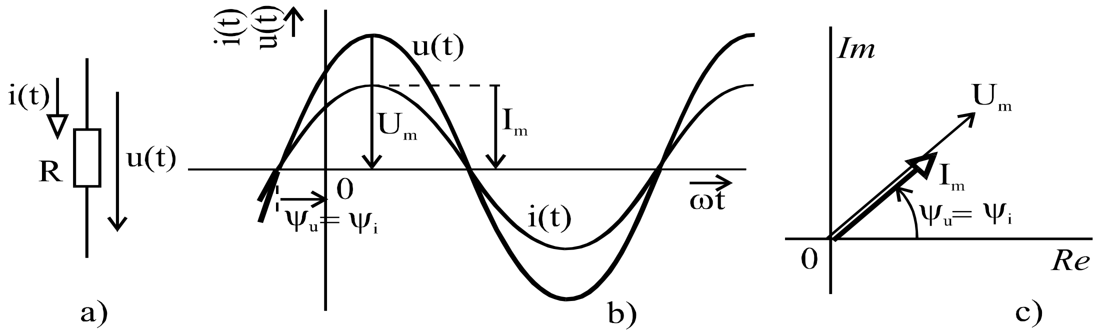
Úbytek napětí na prvku, který závisí na proudu a na charakteru prvku, můžeme psát

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)\,. \qquad (3.4 - 2)$$

3.4.1 Rezistor

Okamžitá hodnota napětí na **rezistoru** je přímo úměrná okamžité hodnotě proudu v tomtéž okamžiku (obr.3.4 -1b)

$$u(t) = R.i(t) = R.I_m \sin(\omega t + \psi_i) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)\,. \qquad (3.4 - 3)$$



Obrázek 3.4.1 Rezistor v obvodu harmonicky ustáleného stavu

Proto pro amplitudu napětí a fázový úhel platí:

$$U_m = R.I_m\,, \qquad \psi_u = \psi_i\,. \qquad (3.4 - 4), (3.4 - 5)$$

Říkáme, že napětí a proud jsou ve fázi (fázový posun mezi nimi $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$).
Fázor napětí i fázor proudu mají stejný argument (obr.3.4 –1c). Proto platí

$$\mathbf{U}_m = R.\mathbf{I}_m\,. \qquad (3.4 - 6)$$

Dělíme-li obě strany rovnice odmocninou ze dvou, dostaneme vztah mezi fázory v měřítku efektivních hodnot

$$\mathbf{U} = R.\mathbf{I}\,. \qquad (3.4 - 7)$$

3.4.2 Induktor

Okamžitá hodnota napětí **na induktoru** je úměrná rychlosti změny proudu

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}[I_m \sin(\omega t + \psi_i)] = \omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2})\,. \qquad (3.4 - 8)$$

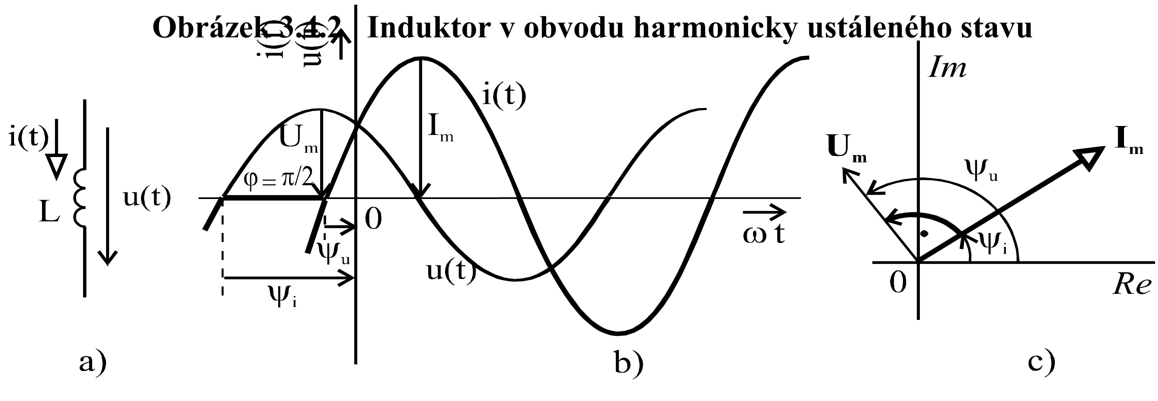
Amplituda napětí je úměrná amplitudě proudu (jde o lineární prvek)

$$U_m = \omega L I_m\,. \qquad (3.4 - 9)$$

Součin ωL představuje odpor, který vykazuje induktor v obvodu s harmonickým ustáleným stavem. Má rozměr odporu a nazývá se **induktivní reaktance**, jeho převrácená hodnota pak **induktivní susceptance.**
Fázový úhel je $\psi_u = \psi_i + \pi/2$, fázový posun je tedy

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \pi/2\;, \qquad (3.4 - 10)$$

Obrázek 3.4.2 Induktor v obvodu harmonicky ustáleného stavu



napětí předbíhá proud o $\pi/2$. Průběh okamžitých hodnot napětí a proudu je nakreslen na obr.3.4 -2b. V souladu s tím, co jsme poznali v předchozí části o derivaci harmonické funkce podle času, můžeme přímo vyjádřit fázor napětí na cívce jako

$$\mathbf{U}_m = j\omega L.\mathbf{I}_m \quad \text{, resp.} \quad \mathbf{U} = j\omega L.\mathbf{I} \qquad (3.4 - 11), (3.4 - 12)$$

Příslušný fázorový diagram je na obr.3.4 -2c.

3.4.3 Kapacitor

Okamžitá hodnota napětí **na kapacitoru** je rovna

$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt\,. \qquad (3.4 - 13)$$

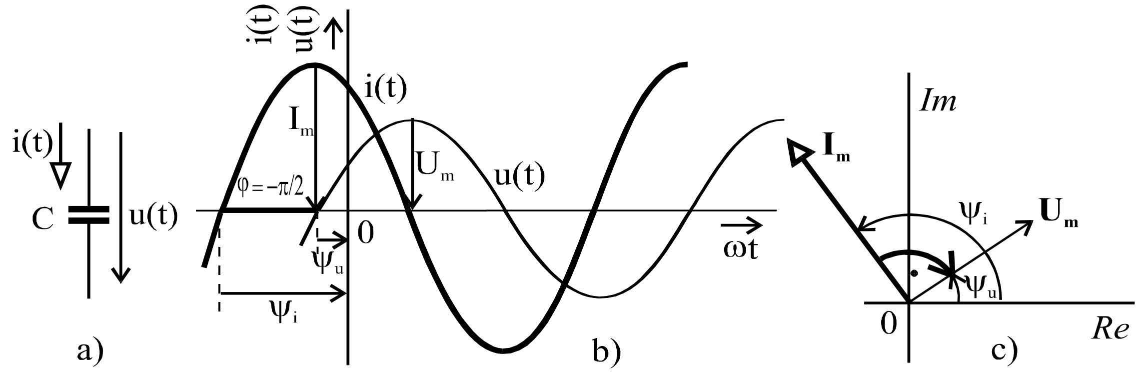
Proto můžeme pro okamžitou hodnotu napětí psát

$$u(t) = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}) \qquad (3.4 - 14)$$

a pro fázory napětí

$$\mathbf{U}_m = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}_m, \qquad \mathbf{U} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}\,. \qquad (3.4 - 15), (3.4 - 16)$$

Zlomek $\frac{1}{\omega C}$ ve vztazích (3.4 - 15), (3.4 - 16) představuje odpor, který vykazuje kapacitor



Obrázek 3.4.3 Kapacitor v obvodu ustáleného harmonického stavu

v obvodech s harmonickým ustáleným stavem a nazýváme ho **kapacitní reaktancí,** součin ωC **kapacitní susceptancí**.

Fázový úhel je zde $\psi_u = \psi_i - \pi/2$, fázový posun je tedy

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2\ . \qquad (3.4 - 17)$$

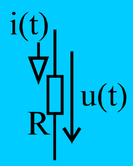
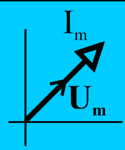
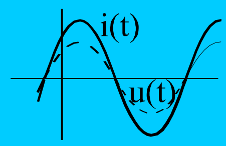
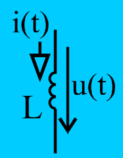
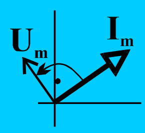
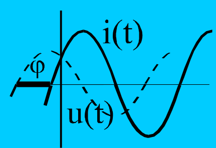
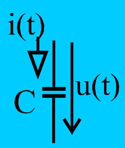
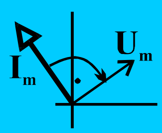
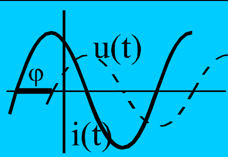
Napětí se u kapacitoru zpožďuje za proudem o $\pi/2$.

Odpovídající průběhy okamžitých hodnot napětí a proudu a fázorový diagram jsou na obr.3.4 -3.

3.4.4 Shrnutí podkapitoly 3.4

Ucelený přehled o chování základních pasivních prvků v obvodech harmonického ustáleného stavu podává souhrnně tabulka 3.4 -1.

tabulka 3.4-1 Impedance

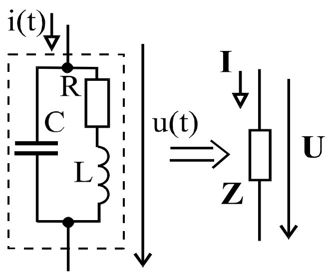
Prvek	*Okam.hod.*	*Ampl.,fáze*	*Imped. Z*	*Fázor. d.*	*Časový. diag.*
	$u(t) = R\, i(t)$	$U_m = R\, I_m$ $\varphi = 0$	R		
	$\Phi(t) = L\, i(t)$ $\mathbf{u(t) = L\, di(t)/dt}$	$U_m = \omega L\, I_m$ $\varphi = \pi/2$	$j\omega L$		
	$q(t) = Cu(t)$ $\mathbf{i(t) = C\, du(t)/dt}$	$U_m = (1/\omega C) I_m$ $\varphi = -\pi/2$	$1/j\omega C$		

Z tabulky jednoznačně vyplývá, že vzájemný fázový posun harmonického napětí a proudu je nejlépe patrný z fázorového diagramu. Vyplývá z něho, že na rezistoru nedochází k fázovému posunu mezi napětím a proudem, na kapacitoru dochází k fázovému posunu o $-\pi/2$, na induktoru o $\pi/2$. Amplitudy napětí jsou lineárně závislé na amplitudách proudů, konstantami úměrnosti mezi nimi jsou - u rezistoru odpor R, u induktoru střídavý odpor ωL a u kapacitoru střídavý odpor $1/\omega C$.

3.5 Imitance

Jak vyplynulo z předchozího odstavce, pro základní lineární obvodové prvky v harmonickém ustáleném stavu platí mezi amplitudami, mezi efektivními hodnotami a také mezi komplexory a fázory napětí a proudu lineární závislost obdobná Ohmovu zákonu pro okamžité hodnoty. Konstantou úměrnosti ve vztazích mezi fázory je komplexní číslo, jehož absolutní velikost (modul) udává střídavý odpor prvku a argument udává fázový posun mezi napětím a proudem na prvku. Pro uvedené prvky L, R, C se rozsah fázového posunu φ pohybuje od $+\pi/2$ do $-\pi/2$.

V oboru lineárních operací s fázory musí proto platit obdobná lineární závislost i pro obecný lineární pasivní dvojpól složený z libovolné kombinace základních pasivních obvodových prvků. (Na obr. 3.5 -1 je příklad jednoduchého obvodu složeného ze tří základních obvodových prvků.) Pro obecný lineární pasivní dvojpól můžeme tedy napsat lineární vztah



Obrázek 3.5.1 Impedance

vztah mezi fázory napětí a proudu

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}.\,\mathbf{I} \quad \text{případně} \quad \mathbf{U_m} = \mathbf{Z}\,.\mathbf{I_m} \qquad (3.5 - 1)$$

a říkáme mu **zobecněný Ohmův zákon** pro fázory. Konstanta úměrnosti **Z** *[Ω]* se nazývá **impedance** nebo **obecný komplexní odpor**. Po dosazení za fázory napětí a proudu

$\mathbf{U}_m = U_m.e^{j\psi_u}$, $\mathbf{I}_m = I_m.e^{j\psi_i}$ můžeme pro impedanci psát

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}/\mathbf{I} = \mathbf{U}_m / \mathbf{I}_m = (U_m / I_m).e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z.e^{j\varphi} \quad . \qquad (3.5 - 2)$$

Modul impedance Z tedy představuje poměr amplitud (nebo efektivních hodnot) napětí a proudu a její argument fázový posun φ mezi napětím a proudem na uvedené impedanci **Z**.

(Význam pojmu obecné impedance nám může dokreslit již dříve uvedený obr.3.3 -2a a 3.3 -2b představující fázorový a časový diagram napětí a proudu na obecné impedanci.) Impedanci můžeme vyjádřit jako komplexní číslo také ve složkovém tvaru

$$\mathbf{Z} = R + j\,X \quad . \qquad (3.5 - 3)$$

Reálná část impedance se nazývá činná složka (rezistance), imaginární část jalová složka (reaktance). Impedanci, rezistanci i reaktanci udáváme v ohmech. Podobně jako impedanci, která představuje zobecněný střídavý odpor dvojpólu, zavádíme **admitanci** . Je to převrácená hodnota impedance a považujeme ji za zobecněnou vodivost **Y** = **1/Z** (má rozměr vodivosti *[S]*). Impedance (popřípadě admitance) jsou základními parametry dvojpólu popisující komplexně jejich chování v harmonickém ustáleném stavu. Často se označují souhrnně jako **imitance** (**im**pedance + adm**itance).** Pro základní obvodové prvky jsou imitance přehledně shrnuty v tabulce 3.5 - 1.

Příklad 3.5 –1:

Určete impedanci kapacitoru o kapacitě 1 μF a impedanci induktoru o indukčnosti 0,1 H při kmitočtu 50 Hz.

Pro f= 50 Hz: $\mathbf{Z_L} = j\omega L = j.2.\pi.50\ .\ 0{,}1 = j\ 31{,}416$ *[Ω]*

$\mathbf{Z_C} = 1/\ (j\omega C) = j/(2.\pi.50) = -j\ 318{,}3099$ *[Ω]*

3.5.1 Shrnutí podkapitoly 3.5

Komplexní konstanta úměrnosti mezi fázory napětí a proudu se nazývá **impedance** nebo **obecný komplexní odpor**. Modul impedance Z představuje poměr amplitud (nebo efektivních hodnot) napětí a proudu a její argument fázový posun φ mezi napětím a proudem na uvedené impedanci **Z**. Souhrnný přehled **imitancí** (impedancí a admitancí) základních obvodových prvků podává tabulka 3.5 -1.

tabulka 3.5-1 Imitance prvků

Imitance základních obvodových pasivních prvků			
PRVEK	PARAMETR	IMPEDANCE **Z**	ADMITANCE **Y**
Rezistor	R, G	R	G
Induktor	L	jωL	1/ jωL
Kapacitor	C	1/jωC	jωC

3.5.2 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 3.5

Příklad 3.5 –2:

Určete impedanci kapacitoru o kapacitě 1 μF a impedanci induktoru o indukčnosti 0,1 H při kmitočtu 500 Hz.

3.6 Výkon

Pro určení výkonu v obvodech harmonického ustáleného stavu předpokládáme pro jednoduchost fázový úhel napětí $\psi_u = 0$, tedy $\psi_i = -\varphi$. Pro okamžité hodnoty napětí a proudu potom můžeme psát

$$u(t) = U_m \sin \omega t \quad , \quad i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi) \quad . \qquad (3.6 - 1), (3.6 - 2)$$

Okamžitý výkon je dán součinem okamžitých hodnot napětí a proudu

$$p(t) = u(t) \, . \, i(t) \, . \qquad (3.6 - 3)$$

Dosadíme-li do vztahu za okamžité hodnoty napětí a proudu, po úpravě konečného výrazu pomocí vztahu sinα.sinβ = (1/2)[cos(α−β) − cos(α+β)], obdržíme

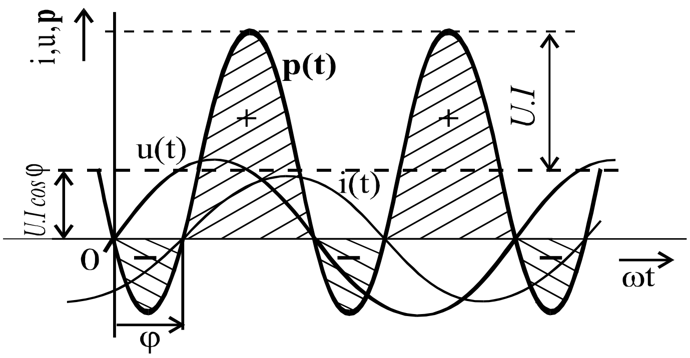
$$p(t) = U_m.I_m \sin \omega t \, . \, \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \quad . \qquad (3.6 - 4)$$

Po zavedení efektivních hodnot $U = U_m / \sqrt{2}$, $I = I_m / \sqrt{2}$ můžeme psát

$$p(t) = U.I \cos \varphi - U.I \cos(2\omega t - \varphi) \quad . \qquad (3.6 - 5)$$

První člen ve vztahu (3.6 - 5) je stálou složkou výkonu, druhý kmitavou složkou kmitající s dvojnásobným kmitočtem. Na obr. 3.6 -1 jsou zakresleny časové průběhy jednotlivých veličin pro fázový posun φ > 0. (Je vidět, že v intervalu, kde jsou napětí i proud stejného znaménka , je okamžitý výkon kladný.)

Ze vztahu (3.6 - 5)je patrné, že pro rezistor, u kterého je fázový posun mezi napětím a proudem φ = 0 , je stálá složka rovna amplitudě kmitavé složky a výkon je stále kladný

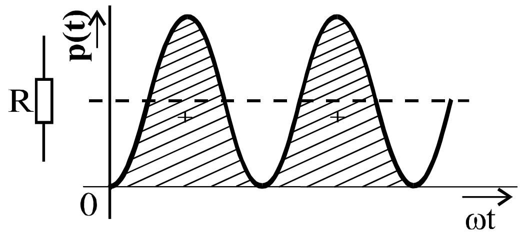


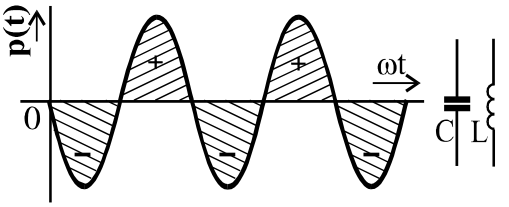
Obrázek 3.6.1 Okamžitý výkon

(obr.1.6-2a). Rezistor tedy v každém okamžiku bere výkon z vnějšího obvodu. U induktoru (kapacitoru) je fázový posun φ = + π/2 (- π/2), proto je stálá složka výkonu rovna nule, energie se jen přelévá ze zdroje do spotřebiče a naopak. V tomto případě hovoříme o výkonu jalovém (obr.3.6 - 2b). Pro praxi jsou velmi důležité výkonové veličiny charakterizující průměrné účinky výkonu po dobu periody.

Činný výkon je definován jako střední hodnota okamžitého výkonu za dobu periody

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\, dt \quad . \qquad (3.6 - 6)$$





Obrázek 3.6.2 Okamžitý výkon (R) **Obrázek 3.6.3 Okamžitý výkon (C, L)**

Dosadíme-li do vzorce za okamžitý výkon ze vztahu (3.6-5), po integraci člen s kmitavou složkou vymizí a zůstane jen stálá složka. Činný výkon je tedy

$$P = U.I\cos\varphi \tag{3.6 - 7}$$

a udává se ve wattech [W]. Jeho velikost závisí nejen na velikosti napětí U a proudu I ale také na cosφ, který se nazývá **účiníkem**

$$\cos\varphi = \frac{P}{U.I} \quad . \tag{3.6 - 8}$$

Je roven jedné při čistě odporové zátěži a menší než jedna, jde-li o obecnou zatěžovací impedanci. (Je-li $P \geq 0$, tj. $\cos\varphi \geq 0$, je dvojpól pasivní, neboť u něho převažuje spotřeba výkonu z vnějšího obvodu. Mezní případ, kdy $P = 0$ je možný jen u ideálních akumulačních prvků. Je-li $P < 0$, to znamená, že $\cos\varphi < 0$ ($\varphi > \pi/2$ nebo $\varphi < -\pi/2$), je uvažovaný dvojpól zdrojem, převažuje u něho dodávka výkonu do vnějšího obvodu.)

Dalšími výkonovými parametry, užívanými zejména v energetice, jsou jalový výkon a zdánlivý výkon.

Jalový výkon je definován vztahem

$$Q = U.I\sin\varphi \quad . \tag{3.6 - 9}$$

Pro odlišení jeho charakteru od výkonu činného (nekoná práci) se udává ve voltampérech reaktančních [var].

Zdánlivý výkon je definován jako součin efektivních hodnot napětí a proudu

$$S = U.\,I \tag{3.6 - 10}$$

a udává se ve voltampérech [VA]. Charakterizuje výkonové možnosti energetických zařízení, např. generátorů. Ty jsou navrhovány na určité jmenovité napětí a na určitý jmenovitý proud. Součin těchto veličin, tj.zdánlivý výkon, charakterizuje pak energetické možnosti zařízení. Jak je vidět ve srovnání se vztahem (1.6 - 7), je zdánlivý výkon roven maximálnímu činnému výkonu, který je možné obdržet při daných hodnotách napětí U a proudu I .

Pro výpočet činného, jalového i zdánlivého výkonu je možno využít symbolického vyjádření harmonických veličin pomocí fázorů. Jestliže předpokládáme u pasivního dvojpólu fázory napětí a proudu v měřítku efektivních hodnot

$$\mathbf{U} = U.e^{j\psi_u} \quad , \quad \mathbf{I} = I.e^{j\psi_i} \quad , \qquad (3.6 - 11), (3.6 - 12)$$

potom formální součin

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}.\mathbf{I}^* = U.e^{j\psi_u}.I.e^{-j\psi_i} = U.I\,e^{j(\psi_u-\psi_i)} = U.I\,e^{j\varphi} = U.I\left[\cos\varphi + j\sin\varphi\right] = P + jQ \tag{3.6 - 13}$$

označujeme jako **komplexní výkon**. V uvedeném vztahu vystupuje komplexně sdružený fázor proudu $\mathbf{I}^* = I.e^{-j\psi_i}$ proto, aby ve výpočtu fázový posun odpovídal zavedené definici (rozdílu počáteční fáze napětí a proudu $\varphi = \psi_u - \psi_i$).

Při použití fázorů v měřítku amplitud je komplexní výkon $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{U}_m.\mathbf{I}^*_m$. Ze vztahu (3.6 - 13) vyplývá, že činný výkon P je reálná část, jalový výkon Q imaginární část a zdánlivý výkon S modul komplexního výkonu **S**

$$P = \mathrm{Re}\{\mathbf{S}\},\ Q = \mathrm{Im}\{\mathbf{S}\},\ S = |\mathbf{S}| \quad .$$

Jsou-li k dispozici pro výpočet jenom napětí nebo proud a imitance dvojpólu, je možno vyjádřit výkon za pomoci zobecněného Ohmova zákona také jako

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}.\mathbf{I}^* = \mathbf{Z}.\mathbf{I}.\mathbf{I}^* = \mathbf{Z}.I^2 = \mathbf{U}.\mathbf{U}^*\mathbf{Y}^* = U^2.\mathbf{Y}^* \quad . \tag{3.6 - 14}$$

Příklad 3.6 –1:

Na svorkách lineárního dvojpólu bylo naměřeno napětí $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) =$ $= 30 \sin 314(t)$ [V] a proud tekoucí dvojpólem $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 1{,}5 \sin(314t - 0{,}6)$ [A].Vypočítejte činný, jalový, zdánlivý a komplexní výkon dodávaný dvojpólu.

Fázový posun je $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - (-0{,}6) = 0{,}6$ [rad],

zdánlivý výkon $S = U.I = \dfrac{U_m I_m}{2} = 0{,}5.30.1{,}5 = 22{,}5$ [VA],

činný výkon $P = S.\cos\varphi = 22{,}5.\cos 0{,}6 = 18{,}57$ [W],

jalový výkon $Q = S \sin\varphi = 22{,}5.\sin 0{,}6 = 12{,}70$ [var],

komplexní výkon $\mathbf{S} = P + jQ = 18{,}57 + j\,12{,}70 = 22{,}5.\,e^{j0{,}6}$ [VA].

Komplexní výkon pomocí fázorů $\mathbf{S} = \dfrac{1}{2}\mathbf{U}_m.\mathbf{I}^*_m = 0{,}5.30.1{,}5\ .e^{j0{,}6} = 22{,}5\,.e^{j0{,}6}$ [VA].

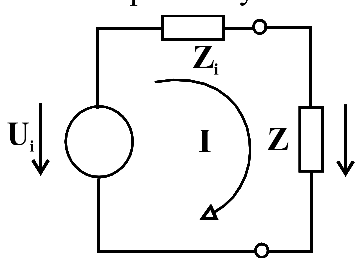
3.6.1 Výkonové přizpůsobení

Také v obvodech s harmonickým ustáleným stavem nás zajímá podmínka přenosu maximálního výkonu ze zdroje do pasivní zátěže. Obecnou pasivní zátěž budeme charakterizovat její impedancí Z =R+jX . Jako aktivní zdroj (dvojpól) budeme uvažovat náhradní zapojení ideálního harmonického zdroje napětí U_i se sériovou vnitřní impedancí $Z_i = R_i + j\,X_i$ (obr.3.6-3). Pro činný výkon pasivního dvojpólu podle výše uvedeného vztahu platí

$$P = \mathrm{Re}\{\mathbf{S}\} = \mathrm{Re}\{\mathbf{U}.\mathbf{I}^*\} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{U}_i \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}}\left(\frac{\mathbf{U}_i}{\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}}\right)^*\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{U_i^2 \frac{R + jX}{[(R + R_i) + j(X + X_i)].[(R + R_i) - j(X + X_i)]}\right\} = \frac{U_i^2.R}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2} \ . \tag{1.6 - 15}$$

Z posledního výrazu je zřejmé, že při splnění první podmínky maxima , tj. $X = -X_i$, se vyraz zjednoduší a obdržíme vztah, pro který jsme už našli v předchozí části předmětu podmínku pro maximální přenos výkonu a to $R = R_i$. Obě podmínky



Obrázek 3.6.4 Výkon

$$R = R_i \ , \qquad X = -X_i \tag{1.6 - 16}$$

můžeme zapsat souhrnně jako

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_i^* \ . \tag{1.6 - 17}$$

Maximální přenesený výkon je pak

$$\mathrm{P_{max}} = \frac{U_i^2}{4R_i} \qquad (1.6 - 18)$$

a účinnost je

$$\eta = \frac{P}{P_i} = \frac{R}{R_i + R} = 0{,}5\,. \qquad (1.6 - 19)$$

V některých případech můžeme ovlivnit pouze velikost modulu impedance pasivního dvojpólu a potom hovoříme o částečném nebo neúplném přizpůsobení. Při něm je samozřejmě přenesený výkon již menší než při úplném přizpůsobení.

3.6.2 Shrnutí podkapitoly 3.6

Symbolická metoda je s výhodou využívána i při výpočtu výkonu. Formální součin

$\mathbf{S} = \mathbf{U}.\mathbf{I}^* = U.e^{j\psi_u}.I.e^{-j\psi_i} = U.I\,e^{j(\psi_u-\psi_i)} = U.I\,e^{j\varphi} = U.I\left[\cos\varphi + j\sin\varphi\right] = P + jQ$

je označován jako **komplexní výkon**, jeho reálná část P určuje **reálný** výkon, imaginární část Q **jalový** výkon a jeho modul S výkon **zdánlivý** .

K maximálnímu přenosu výkonu ze zdroje do zátěže dojde v případě úplného přizpůsobení, kdy pro impedanci zdroje a zátěže platí : $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_i^*$.

3.6.3 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 3.6

Příklad 3.6 –2:

Určete maximální možný činný výkon, který může dodat zdroj harmonického napětí $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ = 325 sin (314t) [V] o vnitřní impedanci $\mathbf{Z}_i$ = 120 +j 10 [Ω] do zátěže **Z**.

3.7 Metody analýzy lineárních obvodů v harmonickém ustáleném stavu

Z předchozích kapitol vyplývá, že základní operace s harmonicky proměnnými veličinami v časové oblasti můžeme převést na podstatně jednodušší operace s fázory v komplexní rovině. Metoda analýzy, která využívá komplexory (rotující fázory) a fázory jako symboly, které zastupují skutečné fyzikální veličiny (okamžité hodnoty harmonického napětí a proudu), se nazývá **symbolická analýza**. Při její aplikaci je však nutno stále mít na paměti, že představuje určitý druh transformace a odráží jen určitým způsobem skutečné fyzikální závislosti obvodů v harmonickém ustáleném stavu.

3.7.1 Základní vztahy a zákony v symbolickém tvaru

Protože fázory zastupují skutečné fyzikální veličiny lineárních obvodů, musí platit při operacích s nimi stejné zákonitosti a vztahy, se kterými jsme se již dříve při popisu lineárních obvodů setkali, To naznačily již i předchozí poznatky o obecných vlastnostech základních pasivních prvků a vyústily do definice obecných imitancí. U nich platí mezi fázory napětí a proudu zobecněný Ohmův zákon

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}.\mathbf{I}\,, \quad \text{případně} \quad \mathbf{I} = \mathbf{Y}.\mathbf{U}\,. \tag{3.7 - 1}$$

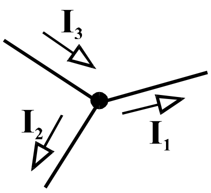
Při analýze obvodů můžeme vycházet i z obecné platnosti Kirchhoffových zákonů v symbolickém tvaru. Pro libovolný uzel obvodu můžeme psát pro fázory proudu 1.Kz, pro libovolnou obvodovou smyčku pak 2.Kz v symbolickém tvaru :

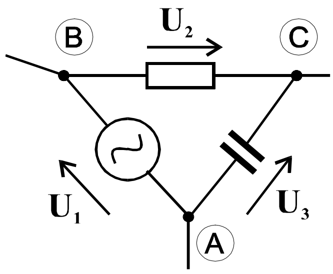
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_\mathrm{i} = 0 \quad , \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{U}_\mathrm{i} = 0 \quad . \qquad (3.7 - 2), (3.7 - 3)$$

Pro příklad z obr. 3.7-1 tedy platí $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 = 0$. Podobně můžeme aplikovat 2.Kz pro fázory napětí v obvodové smyčce z příkladu na obr.3.7 – 2.

$$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_3 = 0\,.$$

(Přes to, že fázory představují amplitudy a fáze, ne okamžité hodnoty harmonicky proměnných veličin, přiřazujeme jim zde směr pomocí orientačních šipek napětí a proudu v duchu již dříve uvedených zásad.)





Obrázek 3.7.1 Příklad uzlu **Obrázek 3.7.2 Příklad smyčky**

V případě, že řešíme lineární obvody v ustáleném harmonickém stavu při jediném kmitočtu, mezi fázory potom platí také princip superpozice. Všechny metody řešení obvodů vycházející z jeho aplikace mohou být tedy využity i v symbolické podobě. Při analýze obvodů pomocí fázorů tak můžeme použít všech metod řešení obvodů v ustáleném stejnosměrném stavu, se kterými jsme se seznámili v minulém semestru.

3.7.2 Metoda postupného zjednodušování

Je jednou z metod pro speciální použití a vychází z toho, že v obvodě můžeme postupně nahrazovat v jednotlivých větvích **sériově řazené impedance** jedinou impedancí, která je součtem dílčích impedancí

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_\mathrm{i} \quad . \tag{3.7 - 4}$$

Podobně pak nahrazujeme **paralelní spojení admitancí** výslednou admitancí, která je součtem dílčích admitancí

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_\mathrm{i} \quad . \tag{3.7 - 5}$$

(Pro paralelní spojení dvou dvojpólů s impedancemi $\mathbf{Z}_1$ a $\mathbf{Z}_2$ platí pro výslednou impedanci

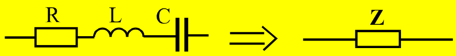
$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z}_1 . \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \quad .)$$

Na výsledný jednoduchý obvod potom můžeme aplikovat zobecněný Ohmův zákon a snadno určit hledanou obvodovou veličinu.

Použití uvedené metody ukážeme postupně na několika příkladech.

Příklad 3.7 -1

Vypočítejte výslednou impedanci sériového spojení induktoru L, jehož reaktance je $\omega L = 50\ [\Omega]$, kapacitoru o reaktanci $1/\omega C = 30\ [\Omega]$ a rezistoru o odporu $R = 120\ [\Omega]$.



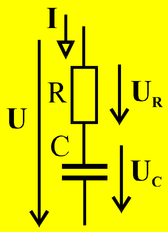
$$\mathbf{Z} = R + j\omega L + 1/(j\,\omega C) = R + j\omega L - j/(\omega C) = R + j\left[(\omega L - 1/(\omega C)\right] =$$
$$= 120 + j50 - j30 = 120 + j20 = 121{,}6553\,.\,e^{j0{,}165}\ [\Omega]\ .$$

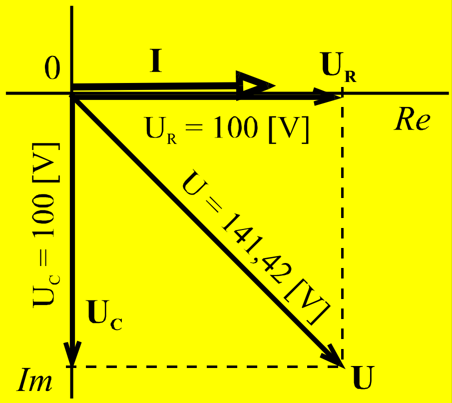
Příklad 3.7 -2

Určete výslednou impedanci sériového spojení rezistoru o odporu $R = 100\ [\Omega]$ a kapacitoru C, jehož reaktance je $1/\omega C = 100\ [\Omega]$. Vypočítejte fázory napětí na jednotlivých prvcích a fázor celkového napětí na sériovém spojení, protéká-li větví proud $\mathbf{I} = 1\ [A]$.

$\mathbf{Z} = \mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2} = R + 1/(j\ \omega C) = 100 - j100$
$= \sqrt{100^2 + 100^2}\,.\,e^{-j0{,}78} =$
$= 141{,}4214.\ e^{-j0{,}78}\ [\Omega]$.

$\mathbf{U_1} = \mathbf{U_R} = \mathbf{Z_1}.\,\mathbf{I} = R.\mathbf{I} = 100\,.1 =$
$= 100 + j0 = 100\ e^{j0}\ [V]$.
$\mathbf{U_2} = \mathbf{U_C} = \mathbf{Z_2}.\,\mathbf{I} = 1/(j\ \omega C).\mathbf{I} = -j100\,.1 = 0 - j100 =$
$= 100\ e^{-j\pi/2}\ [V]$.
$\mathbf{U} = \mathbf{U_1} + \mathbf{U_2} = 100 + j0 - j100 = 100 - j\,100 =$
$= 141{,}4214\ e^{-j0{,}78}\ [V]$.





Poznámka:

Je vidět, že pro napětí na jednotlivých impedancích platí $\dfrac{\mathbf{U_1}}{\mathbf{U_2}} = \dfrac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}} = \dfrac{R}{1/(j\omega C)}$.

Zapojení tedy představuje **kmitočtově závislý** dělič napětí. (O jeho vlastnostech a použití bude podrobně pojednávat další část kapitoly.) Podobně jako v případě rezistorových obvodů pro fázory napětí na jednotlivých prvcích děliče platí

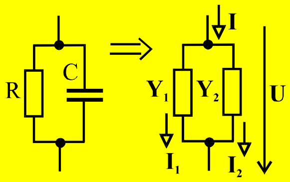
$$\mathbf{U_1} = \mathbf{U}.\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2}}\ , \qquad \mathbf{U_2} = \mathbf{U}.\frac{\mathbf{Z_2}}{\mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2}}\ .$$

Pozor, pro velikosti amplitud napětí jednotlivých fázorů zde ale platí :

$$U_1 = /\,\mathbf{U_1}\,/ = U.\frac{Z_1}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}} \quad \text{a} \quad U_2 = /\,\mathbf{U_2}\,/ = U.\frac{Z_2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}$$

Příklad 3.7 -3

Vypočítejte výslednou admitanci paralelního spojení rezistoru o odporu $R = 20\ [\Omega]$ a kapacitoru C, jehož reaktance je $1/\omega C = 100\ [\Omega]$. Určete fázory proudů, které protékají jednotlivými admitancemi a fázor celkového proudu, je-li na svorkách obvodu připojeno napětí **U** = 100 *[V]*.



$\mathbf{Y} = \mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2} = G + j\omega C = 0{,}05 + j0{,}01 = [\,S].$

$\mathbf{I_1} = \mathbf{U}.\,\mathbf{Y_1} = \mathbf{U}.\,G = 100\ .0{,}05 = 5 + j0\quad [A]\,.$

$\mathbf{I_2} = \mathbf{U}.\,\mathbf{Y_2} = \mathbf{U}.\,j\omega C = 100\ .0{,}01j = 0 + j\quad [A]\,.$

$I = I_1 + I_2 = 5 + j = 5{,}599\ e^{j0{,}2}\ [A]\,.$

Poznámka:

Je vidět, že obvod představuje **kmitočtově závislý** dělič proudu, neboť pro něj platí $\dfrac{\mathbf{I_1}}{\mathbf{I_2}} = \dfrac{\mathbf{Y_1}}{\mathbf{Y_2}} = \dfrac{G}{j\omega C}$. Pro jednotlivé proudy je možno psát podobně jako u rezistorových obvodů

$$\mathbf{I_1} = \mathbf{I}.\frac{\mathbf{Y_1}}{\mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2}}\quad , \qquad \mathbf{I_2} = \mathbf{I}.\frac{\mathbf{Y_2}}{\mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2}}\ .$$

Pozor , pro velikosti modulů fázorů jednotlivých proudů ale platí :

$$I_1 = /\mathbf{I_1}/ = I.\frac{Y_1}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}} \quad \text{a} \quad I_2 = /\mathbf{I_2}/ = I.\frac{Y_2}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}}\ .$$

Příklad 3.7 -4

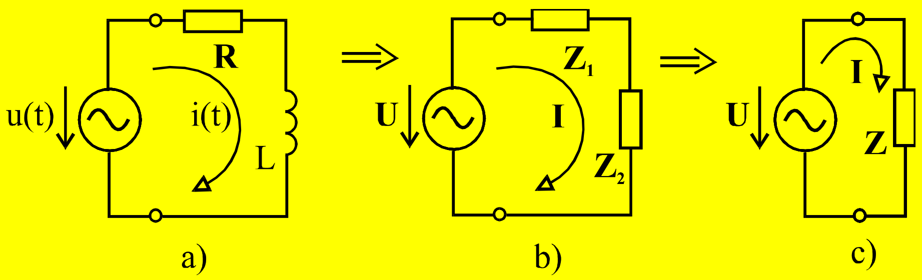
V obvodu uvedeném na obr.3.7 -3a vypočítejte: a) amplitudu a fázový posun proudu, který protéká sériovým spojením induktoru o indukčnosti L =0,5 *[H]* a rezistoru o odporu R = 120 *[Ω]*, b) výkon (komplexní, činný, jalový), který je dodáván do obvodu zdrojem harmonického napětí $u(t) = U_m \sin(\omega t)\ [V]$. Napájecí napětí má kmitočet sítě f = 50 *[Hz]*, efektivní hodnota napětí zdroje je U = 230 *[V]*. Schéma analyzovaného obvodu s fázory je na obr. 3.7 -3b

Ad a)

$\mathbf{U} = 230.\ e^{j0} = 230\ \ [V]$. Celková impedance $\mathbf{Z} = \mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2} = R + j\omega L =$

$= 120 + j\ 2.\pi.50\ .\ 0{,}5 = 120 + j\ 157{,}0796 = 197{,}6715.\ e^{j0{,}9184}\ \ [\Omega].$

Obvod můžeme zjednodušit na elementární obvod (obr.3.7-3c) ,ve kterém platí



Obrázek 3.7.3 K příkladu 3.7-4

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = \frac{230}{197{,}6715.\,e^{j0{,}9184}} = 1{,}1635.\ e^{-j0{,}9184}\ [A],\ \text{amplituda je tedy}$$

$I_m = \sqrt{2}\ .\ I = \sqrt{2}\ .\ 1{,}1635 = 1{,}6455\ [A]$, fázový úhel $\psi_i = -0{,}9184\ \ [rad]$, okamžitá hodnota proudu je $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 1{,}6455 \sin(100\pi t - 0{,}9184)$ *[A]* .

Ad b)

$\mathbf{S} = \mathbf{U}.\mathbf{I}^* = 230\ .\ 1{,}1635\ e^{j0{,}9184} = 267{,}6158.\ e^{j0{,}9184} = 162{,}4609 + j212{,}6609$ *[VA]*

$P = Re\{\mathbf{S}\} = 162{,}4609$ *[W]*, $Q = Im\{\mathbf{S}\} = 212{,}6609$ *[var]*, $S = /\mathbf{S}/ = 267{,}6158$ *[VA]*,

cosφ = P/S= 0,6071 .

3.7.3 Metoda úměrných veličin

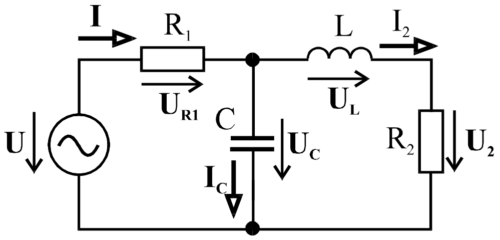
V jednoduchých obvodech s jedním zdrojem je často výhodné místo metody postupného zjednodušování použít metodu úměrných veličin. Její princip byl vysvětlen u nesetrvačných obvodů v předchozí části předmětu. Použití metody při řešení obvodů pomocí fázorů proto jen stručně ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 3.7 -4a

Určete výstupní napětí příčkového článku z obr.3.7-3a, který je napájen zdrojem harmonického napětí $u(t) = U_m \sin(\omega t)$, jsou-li známé reaktance induktoru ωL = 10 [Ω], reaktance kapacitoru 1/ωC = 10 [Ω], odpory rezistorů $R_1 = R_2 = 10$ [Ω] a efektivní hodnota napětí budicího zdroje je U = 10 [V].

Protože je zadána efektivní hodnota, budeme používat fázory v měřítku efektivních hodnot.

Fázor fiktivního výstupního napětí **volíme** $\mathbf{U}_2' = 1$ [V]= 1+ j0 [V] a potom postupně určíme další fázory fiktivních hodnot:



Obrázek 3.7.4 K příkladu 3.7-4

$\mathbf{I}_2' = \mathbf{U}_2' / R_2 = 1/10 = 0{,}1 + j0$ [A] , $\mathbf{U}_L' = j\omega L.\ \mathbf{I}_2' = j10.\ 0{,}1 = 0 + j$ [V] .

$\mathbf{U}_C' = \mathbf{U}_2' + \mathbf{U}_L' = 1 + j$ [V] , $\mathbf{I}_C' = \mathbf{U}_C' / (1/j\omega C) = (1 + j)/{-j10} = -0{,}1 + j\,0{,}1$ [A] ,

$\mathbf{I}' = \mathbf{I}_2' + \mathbf{I}_C' = 0{,}1 - 0{,}1 + 0{,}1j = 0{,}1j$ [A],

$\mathbf{U}_{R1}' = \mathbf{I}'\ .\ R_1 = 10.\ j\,0{,}1 = 0 + j$ [V] .

$\mathbf{U}' = \mathbf{U}_{R1}' + \mathbf{U}_C' = j + 1 + j = 1 + 2j$ [V] .

Koeficient **k** je komplexní číslo

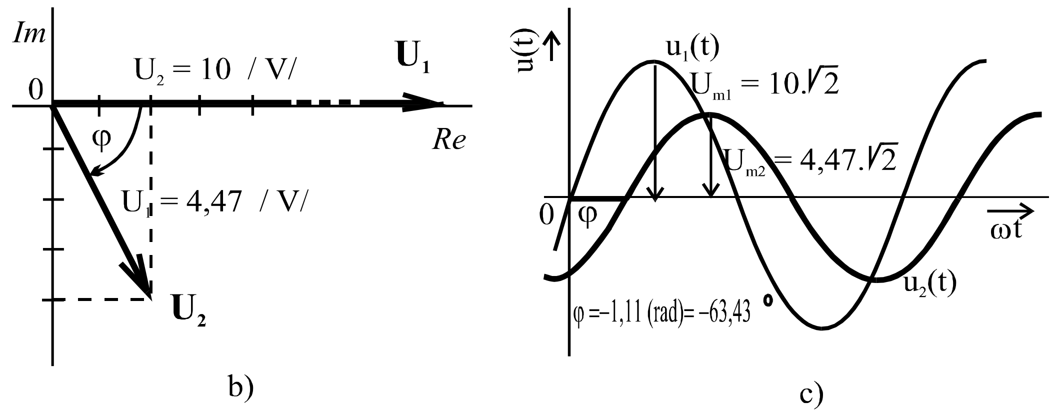
$\mathbf{k} = \mathbf{U} / \mathbf{U}' = 10 / (1 + 2j) = 2 - j4$ [-] . Fázor výstupního napětí je proto

$\mathbf{U}_2 = \mathbf{k}\ .\ \mathbf{U}_2' = (2 - j4)\ .\ 1 = 2 - j4 = 4{,}4721\ e^{-j1{,}1071}$ [V].

Výstupní napětí tedy můžeme psát jako

$$u_2(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 4{,}4721\ .\ \sqrt{2}\ \sin(\omega t + \psi_u) = 6{,}3245 \sin(\omega t - 1{,}1071)\ \ [V].$$

Výsledek analýzy obvodu je zřejmý z fázorového a časového diagramu (obr.3.7 -5b,c), které názorně ukazují vzájemný vztah vstupního a výstupního napětí. Podobně bychom mohli určit všechny ostatní veličiny analyzovaného obvodu.



Obrázek 3.7.5 K příkladu 3.7 – 4

3.7.4 Metoda Kirchhoffových rovnic

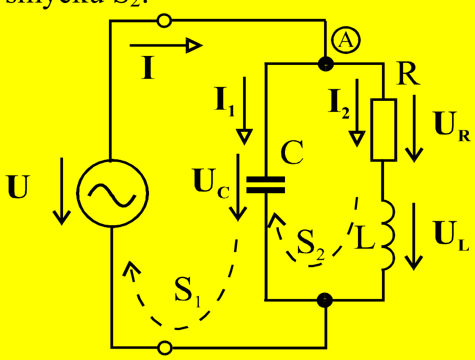
V případě analýzy složitějších obvodů užíváme většinou některou z univerzálních metod. K popisu rovnic popisujících obvod pomocí Kirchhoffových rovnic používáme přímo fázorů napětí a proudu. Výsledná soustava lineárních algebraických rovnic s komplexními koeficienty může být řešena například některou z maticových metod. Postup řešení si ukážeme na analýze obvodu z příkladu 3.7 -5

Příklad 3.7 -5

Metodou Kirchhoffových rovnic určete proud dodávaný zdrojem do obvodu (obr.3.7 - 4), je-li dáno: L = 0,5 [H], R = 120 [Ω], C = 5 [μ F] , $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ [V] , U = 230 [V], f = 50 [Hz].

Neznámé veličiny, které hledáme, budou fázory proudů větví **I** a $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$.

Rovnice potřebné pro řešení získáme aplikací 1.Kz pro uzel A a 2.Kz na smyčku S_1 a smyčku S_2:



Obrázek 3.7.6 K příkladu 3.7-5

$$\begin{aligned} A&: \quad -\mathbf{I} + \mathbf{I_1} + \mathbf{I_2} = 0\,, \\ S_1&: \quad \mathbf{U_C} - \mathbf{U} = 0\,, \\ S_2&: \quad \mathbf{U_R} + \mathbf{U_L} - \mathbf{U_C} = \mathbf{0}\,. \end{aligned} \qquad (3.7\text{ -}6)$$

Jednotlivá napětí v rovnicích vyjádříme pomocí zobecněného Ohmova zákona , budicí napětí **U** převedeme v rovnici smyčky S_1 na druhou stranu a po úpravě rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} &-\mathbf{I} + \mathbf{I_1} + \mathbf{I_2} = 0\,, \\ &\mathbf{I_1}.\ 1/(j\omega C) = \mathbf{U}\,, \\ &-\mathbf{I_1}.\ 1/(j\omega C) + \mathbf{I_2}\ [R + j\omega L - 1/(j\omega C)] = 0 \end{aligned} \qquad (3.7\text{ -}7)$$

Soustava rovnic je tak jednoduchá, že ji můžeme řešit postupnou eliminací neznámých.

Z rovnice smyčky S_1 můžeme vypočítat okamžitě fázor proudu $\mathbf{I_1}$:

$\mathbf{I_1} = \mathbf{U}\ .\ /\ [1/(j\omega C)] = 230\ /\ (-j636{,}6198) = j\ 0{,}3613$ [A] . Poté můžeme již z rovnice pro smyčku S_2 určit fázor proudu $\mathbf{I_2}$:

$$\mathbf{I_2} = \frac{\mathbf{I_1}.(1/j\omega C)}{R + j\omega L} = \frac{j0{,}3613.(-j636{,}6198)}{120 + j157{,}0796} = \frac{230}{197{,}6715.e^{j0{,}9184}} = 1{,}1635.\ e^{-j0{,}9184} =$$

$$= 0{,}7064 - \mathrm{j}\ 0{,}9246 \quad [\mathrm{A}]$$

Hledaný fázor proudu určíme z rovnice pro uzel jako

$$\mathbf{I} = \mathbf{I_1} + \mathbf{I_2} = 0{,}7064 - \mathrm{j}0{,}5633 = 0{,}9035\ e^{-j0{,}6732}$$

A proud dodávaný zdrojem do obvodu je

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 1{,}2777 \sin(100\pi t - 0{,}6732) \quad [A]$$

3.7.5 Metoda smyčkových proudů

U složitějších obvodů místo metody Kirchhoffových rovnic raději používáme metody redukující počet obvodových rovnic. Jednou z nich je metoda smyčkových proudů, kterou můžeme použít při řešení obvodů v symbolickém tvaru. Postup při jejím použití ukážeme na řešení následujícího příkladu.

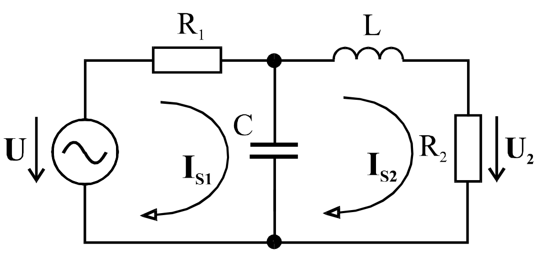
Příklad 3.7 -6

Metodou smyčkových proudů určete proud $\mathbf{I_2}$ v obvodu z příkladu 3.7 –4. V obvodu si zvolíme fázory smyčkových proudů $\mathbf{I_{S1}}$ a $\mathbf{I_{S2}}$ (obr.3.7 -5) a napíšeme 2.Kz pro smyčku S_1 a S_2. Po úpravě obdržíme výslednou soustavu rovnic:

$$[R_1 + 1/(j\omega C)]\,.\mathbf{I_{S1}} - 1/(j\omega C).\,\mathbf{I_{S2}} = \mathbf{U} \ ,$$
$$-1/(j\omega C).\mathbf{I_{S1}} + [R_2 + j\omega L - 1/(j\omega C)].\mathbf{I_{S2}} = 0\ . \qquad (3.7\ \text{-}8)$$

Uvedenou soustavu rovnic můžeme napsat v maticovém tvaru **Z . I = U** :

$$\begin{bmatrix} R_1 + 1/(j\omega C) & -1/(j\omega C) \\ -1/(j\omega C) & R_2 + j\omega L + 1/(j\omega C) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{I_{S1}} \\ \mathbf{I_{S2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ 0 \end{bmatrix} \ . \qquad (3.7\ \text{-}9)$$



Po dosazení konkrétních numerických hodnot má maticový zápis soustavy rovnic tvar

$$\begin{bmatrix} 10 - j10 & j10 \\ j10 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{I_{S1}} \\ \mathbf{I_{S2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

Obrázek 3.7.7 K příkladu 3.7- 6

Řešení soustavy je velmi snadné i pomocí determinantů. Determinant soustavy Δ a subdeterminant soustavy Δ_2 potom jsou:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 10 - j10 & j10 \\ j10 & 10 \end{bmatrix} = (10 - j10).10 - (j10).(j10) = 200 - j100 \ ,$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 10 - j10 & 10 \\ j10 & 0 \end{bmatrix} = \text{-j}100 \quad .$$

Hledaný fázor proudu je tedy

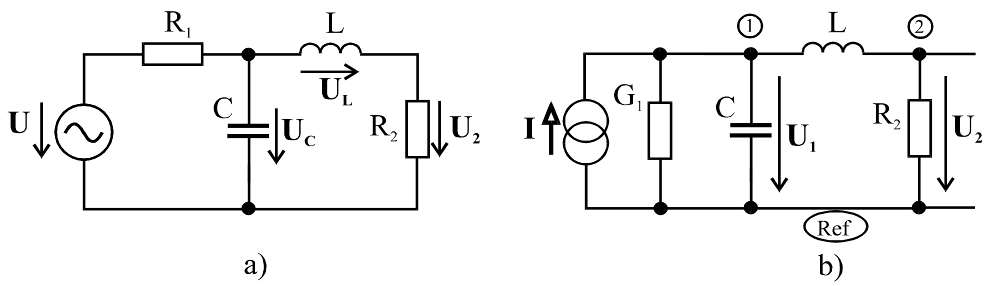
$$\mathbf{I_2} = \mathbf{I_{S2}} = \Delta_2 \ / \ \Delta = -\text{j}100 \ / \ (200\text{-j}100) = 0{,}2 - \text{j}0{,}4 = 0{,}4472 \ e^{-j1{,}1071} \ [\text{A}].$$

3.7.6 Metoda uzlových napětí

Nejčastěji používanou metodou analýzy obvodů, kterou můžeme využít také v symbolickém tvaru, je metoda uzlových napětí. Postup při použití metody při analýze obvodů v harmonickém ustáleném stavu opět ukážeme na řešení předchozího obvodu.

Příklad 3.7 -7

V uvedeném obvodu (obr.3.7 -6) vypočítejte metodou uzlových napětí výstupní napětí příčkového článku.



Obrázek 3.7.8 K příkladu 3.7-7

Protože obvod obsahuje zdroj napětí, přepočítáme jej nejprve na ekvivalentní zdroj proudu (obr.3.7-8b). Za předpokladu, že obvodové parametry jsou stejné jako v obvodu z příkladu 3.7- 4, je velikost fázoru proudu ekvivalentního zdroje proudu dána:

$\mathbf{I_1} = \mathbf{U} / \mathbf{R_1} = 10 / 10 = 1$ [A] , vodivost ekvivalentního zdroje je $G_1 = 1/ R_1 = 0{,}1$ [S]. Pro zvolené uzly 1 a 2 označíme fázory uzlových napětí $\mathbf{U_1}$ a $\mathbf{U_2}$. Aplikací 1K.z. na oba uzly dostaneme po úpravě soustavu rovnic, kterou zapíšeme již přímo v maticovém tvaru

$\mathbf{Y} . \mathbf{U} = \mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} G_1 + j\omega C + 1/(j\omega L) & -1/(j\omega L) \\ -1/(j\omega L) & G_2 + 1/(j\omega L) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{3.7 -10}$$

Po dosazení konkrétních numerických hodnot z příkladu 3.7 -4 má maticový zápis soustavy rovnic tvar

$$\begin{bmatrix} 0{,}1 & -1/j10 \\ -1/j10 & 0{,}1 + 1/j10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{U_1} \\ \mathbf{U_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Řešení soustavy je velmi snadné i pomocí determinantů. Determinant soustavy Δ a subdeterminanty soustavy Δ_1 a Δ_2 potom jsou:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1j \\ 0{,}1j & 0{,}1 - 0{,}1j \end{bmatrix} = 0{,}1 \ . \ 0{,}1 - 0{,}1 \ .0{,}1\text{j}+0{,}1.0{,}1 = 0{,}02\text{-}0{,}01\text{j} \quad ,$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1j \\ 0 & 0{,}1-0{,}1j \end{bmatrix} = 0{,}1\text{-}\ 0{,}1\mathrm{j} \quad , \qquad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 1 \\ 0{,}1j & 0 \end{bmatrix} = \text{-}0{,}1\mathrm{j} \quad .$$

Hledaný fázor napětí je tedy

$$\mathbf{U_2} = \Delta_2 \,/\, \Delta = -0{,}1\mathrm{j}\ /0{,}02\text{-}0{,}01\mathrm{j} = 2 - \mathrm{j}4 = 4{,}4721\ e^{-j1{,}1071}\ [\mathrm{V}].$$

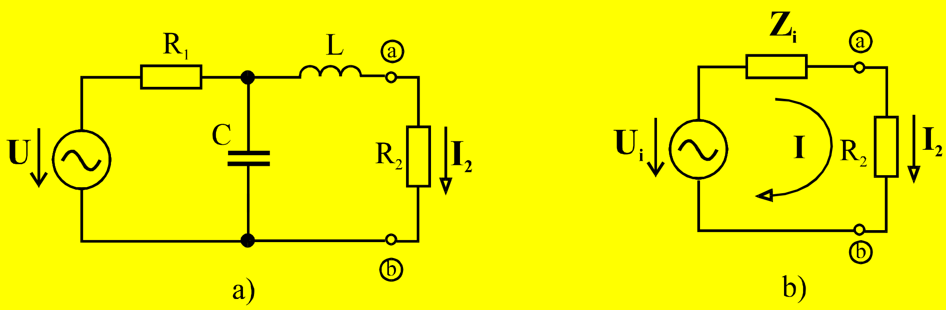
3.7.7 Metoda náhradního zdroje

V případě, že nás v obvodu zajímají jen obvodové veličiny jediné větve obvodu, nebo potřebujeme tyto parametry vyjádřit v závislosti na proměnných hodnotách některých veličin obvodu, je výhodné použít pro analýzu obvodů metodu náhradního zdroje (Theveninova a Nortonova věta). Postup jejího použití při řešení obvodu pomocí fázorů ukážeme na následujícím příkladu.

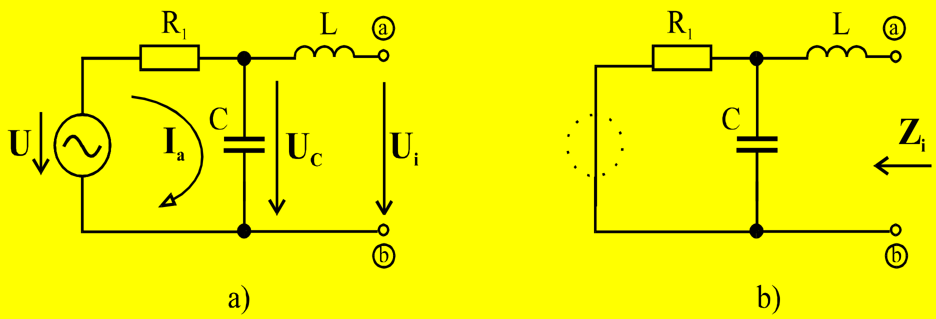
Příklad 3.7 -8

V obvodu na obrázku 3.7 -7a vypočítejte fázor proudu $\mathbf{I_2}$ tekoucí rezistorem R_2 pomocí věty o náhradním zdroji . Podle Theveninovy věty můžeme větev s rezistorem vyjmout a zbývající část obvodu (na obrázku 3.7 -7a od svorek a,b vlevo) nahradit zdrojem s fázorem napětí $\mathbf{U_i}$ a vnitřní impedancí $\mathbf{Z_i}$ (obr.3.7 -7b).

Napětí náhradního zdroje $\mathbf{U_i}$ určíme jako napětí na svorkách a,b analyzovaného obvodu, ze kterého je zkoumaná větev vyjmuta (obr.3.7 -8a). To můžeme určit například metodou



Obrázek 3.7.9 Princip metody náhradního zdroje



Obrázek 3.7.10 K příkladu 3.7-8

postupného zjednodušování obvodu . Použijeme-li hodnoty odporů a reaktancí z příkladu 3.7-4, potom jsou hledané veličiny :

$\mathbf{I_a} = \mathbf{U}/[\, R + 1/(j\omega C)] = 10 / (10-j10) = 0{,}5 + j0{,}5$ [A],

$\mathbf{U_i} = \mathbf{U_C} = \mathbf{I_a}.\ 1/(j\omega C) = (0{,}5 + j0{,}5).(-j10) = 5 - j5$ [V].

Vnitřní impedanci náhradního zdroje určíme jako impedanci obvodu mezi svorkami a, b, jsou-li zdroje vyřazeny (napěťový zdroj nahradíme zkratem – obr.3.7 -10b). Pro obvod na obrázku je tedy impedance dána :

$$\mathbf{Z_i} = j\omega L + \frac{R_1.(1/j\omega C)}{R_1 + (1/j\omega C)} = j10 + \frac{10(-10j)}{10 - j10} = \frac{10}{1-j} = 5 + j5\ [\Omega]\ .$$

Hledaný fázor proudu je $\mathbf{I_2} = \mathbf{I} = \mathbf{U_i} / (\mathbf{Z_i} + R_2) = \dfrac{5 - j5}{5 + j5 + 10} = \dfrac{1-j}{3+j} = 0{,}2 - j0{,}4$ [A].

3.7.8 Shrnutí podkapitoly 3.7

Jestliže provádíme analýzu obvodů v harmonickém ustáleném stavu symbolickou metodou (pracujeme s imitancemi a fázory napětí a proudu), můžeme použít pro řešení obvodů všech metod známých z řešení rezistivních obvodů (v ustáleném stejnosměrném stavu).

3.7.9 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 3.7

Příklad 3.7 –9:

V obvodu uvedeném na obr.3.7 - 9 vypočítejte symbolickou metodou postupným zjednodušováním obvodů:

a) amplitudu a fázový posun proudu, který dodává zdroj do obvodu, b) celkový výkon dodávaný do obvodu zdrojem (komplexní, činný, jalový) je-li dáno:

L = 0,5 [H], R = 120 [Ω], C = 5 [μ F] , $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ [V] , U = 230 [V], f = 50 [Hz],

c) určete výše požadované parametry i pro kapacitu C =12,7962 [μ F].

3.8 Základní obvody RC, RL a RLC

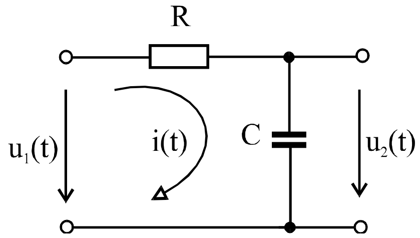
V této části kapitoly se zmíníme o vlastnostech a některých oblastech použití jednoduchých obvodů, složených z lineárních rezistorů, kapacitorů a induktorů. S těmito obvody se v různých aplikacích velmi často setkáváme. V některých případech jde o obvody, které do elektrických či elektronických zařízení úmyslně vkládáme, jindy pak jde o obvody parazitní, které se v zařízeních projevují, ať si to přejeme nebo ne. Tvoří je například nevyhnutelně přítomné kapacity mezi vodiči nebo jednotlivými částmi zařízení, indukčnosti rezistorů a odpory vodičů. Je proto důležité znát dostatečně podrobně vlastnosti těchto obvodů a jejich vliv na procházející signály.

Obvody budeme rozlišovat především podle toho, kolik obsahují akumulačních obvodových prvků (kapacitorů, induktorů) a jakými diferenciálními rovnicemi jsou v důsledku toho popsány. Nejjednodušší jsou **obvody prvního řádu** s jediným akumulačním prvkem kapacitorem nebo induktorem a **obvody druhého řádu** se dvěma akumulačními prvky různého charakteru, tj. s jedním kapacitorem a jedním induktorem.

Nejprve se budeme zabývat obvody 1. řádu, které jsou opsané **lineárními diferenciálními rovnicemi 1. řádu**. Jsou to obvody RC s jedním kapacitorem a obvody RL s jedním induktorem. Vedle uvedeného akumulačního prvku pak mohou obsahovat více či méně složitou kombinaci rezistorů a případně i řízených zdrojů a ideálních operačních zesilovačů. Rozbor začneme nejjednoduššími obvody RC.

3.8.1 Integrační článek RC

Schéma článku je na obr.3.8 -1. Vstupní napětí $u_1(t)$ je přivedeno na sériovou kombinaci rezistoru a kapacitoru, výstupní napětí $u_2(t)$ se odebírá ze svorek kapacitoru. Pro okamžitou hodnotu výstupního napětí

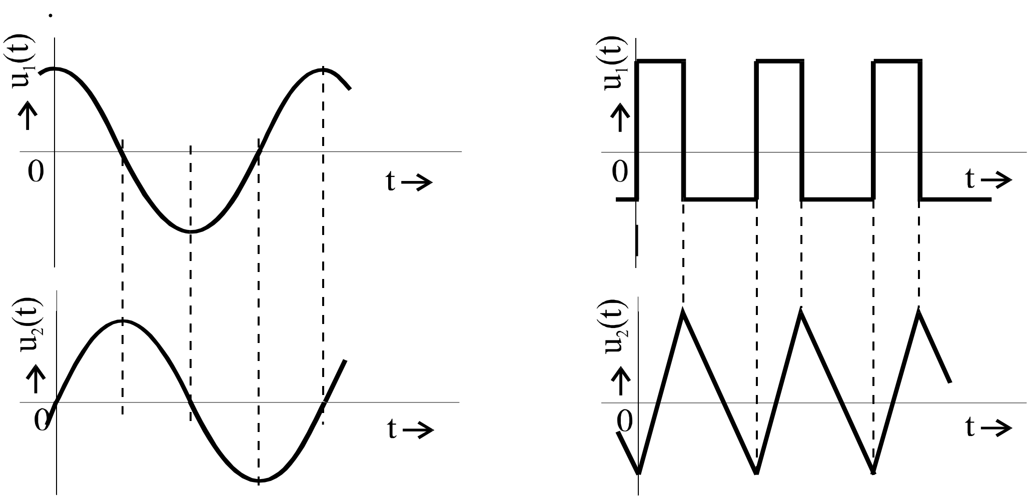


Obrázek 3.8.1 Integrační článek

platí $$u_2(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{q(t)}{C} \quad . \qquad (3.8\ \text{-}1)$$

Okamžitá hodnota proudu přitom je $i(t) = \dfrac{u_1(t) - u_2(t)}{R}$, proud závisí na obou napětích. V případě, kdy je napětí na výstupu v každém okamžiku podstatně menší než napětí na vstupu $u_2(t) << u_1(t)$, můžeme vliv výstupního napětí na proud zanedbat a za těchto podmínek je proud obvodem $i(t) \doteq \dfrac{u_1(t)}{R}$ a výstupní napětí je tak (přibližně) přímo úměrné integrálu ze vstupního napětí

článku $$u_2(t) \doteq \frac{1}{RC}\int u_1(t)dt \qquad (3.8\ \text{-}2)$$



Obrázek 3.8.2 Funkce integračního článku

Proto se tento obvod nazývá **integrační** resp. **kvaziintegrační článek RC**.
Součin RC má rozměr času a nazývá se **časová konstanta** obvodu τ

$$\tau = R.C \qquad (3.8\ \text{-}3)$$

Jeho převrácená hodnota je konstantou úměrnosti mezi výstupním napětím a integrálem vstupního napětí. Na obr.3.8 -2 jsou nakresleny dva příklady použití integračního článku. Obr.3.8 -2a ukazuje, jak z kosinového průběhu napětí získáme sinusový průběh (signál je o 90 ° zpožděn a jeho amplituda je zmenšena úměrně kmitočtu ω). Na obr.3.8 -2b je pak ukázáno, jak z periodického obdélníkového napětí vytvoříme pilovitý průběh, jaký se používá např. v časových základnách osciloskopů.

Není-li při funkci obvodu předpokládaná podmínka $u_2(t) << u_1(t)$ splněna, je třeba určit výstupní napětí řešením úplné diferenciální rovnice. Postup analýzy je obsahem kapitoly o přechodných dějích v lineárních obvodech (kap.5) .

Řešení diferenciálních rovnic je poměrně složitá úloha. Jak jsme však ukázali v předchozích odstavcích, symbolickou metodou umíme jednoduše analyzovat obvody buzené vstupními harmonickými veličinami, které jsou v harmonickém ustáleném stavu. Příklad 3.7 - 2 předchozího odstavce ukázal, že uvedený obvod představuje kmitočtově závislý dělič napětí. Činitel přenosu napětí, tj. poměr fázorů výstupního a vstupního napětí je určen poměrem odpovídajících impedancí:

$$\frac{\mathbf{U}_2(j\omega)}{\mathbf{U}_1(j\omega)} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad . \qquad (3.8\ \text{-}4)$$

Je to kmitočtově závislá komplexní veličina a nazývá se činitel přenosu $\mathbf{K}_\mathbf{u}(j\omega)$.
Z uvedeného vztahu vyplývá, že výstupní napětí je

$$\mathbf{U}_2(j\omega) = \mathbf{K}_\mathbf{u}(\omega) \cdot \mathbf{U}_1(j\omega) \qquad (3.8\ \text{-}5)$$

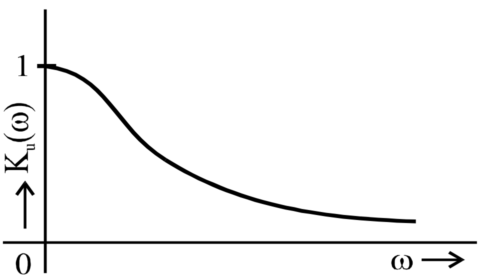
V případě zkoumaného integračního článku tedy

$$\mathbf{U}_2(j\omega) = \mathbf{U}_1(j\omega) \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} \ . \qquad (3.8\ \text{-}6)$$

Modul i argument činitele přenosu závisejí na kmitočtu. Modul přenosu (ve tvaru zlomku) je roven podílu modulů čitatele a jmenovatele zlomku,argument je roven rozdílu argumentů. Proto pro ně platí:

$$K_u(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad , \quad \varphi(\omega) = arctg\,(-\omega RC) \qquad (3.8\ \text{-}7),\ (3.8\ \text{-}8)$$

Poznámka:
V předchozích odstavcích, kde jsme předpokládali harmonický ustálený stav obvodu s konstantním kmitočtem, jsme kmitočtovou závislost fázorů nezdůrazňovali. Nyní, kdy se budeme zabývat podrobněji vlastnostmi obvodů právě v souvislosti se změnou kmitočtu, budeme kmitočtovou závislost zásadně zdůrazňovat. Protože v imitancích vystupuje úhlový kmitočet vždy ve spojení s imaginarní jednotkou (jωL, jωC …), je výhodné považovat v kmitočtových funkcích za nezávisle proměnnou veličinu jω.

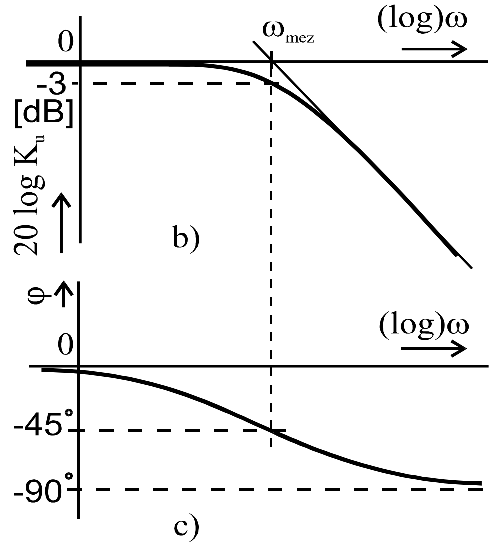


Obrázek 3.8.3 RC článek

Modulová charakteristika integračního článku je graf závislosti modulu činitele přenosu na kmitočtu. Příklad charakteristiky s lineárním měřítkem obou os je nakreslen na obr.3.8 -3a. Charakteristika vychází z bodu $K_u(0) = 1$ na svislé ose (činitel přenosu na velmi nízkých kmitočtech resp. činitel přenosu pro stejnosměrné vstupní napětí je roven jedné) a pro $\omega \to \infty$ se asymptoticky blíží k nule. Obvykle však modulovou charakteristiku kreslíme v souřadné soustavě, která má logaritmickou stupnici na ose kmitočtů a modul se na lineárně dělenou svislou osu vynáší v decibelech (obr.3.8 -4b).

Argumentová charakteristika integračního článku je nakreslena na obr.3.8 -4c. Vodorovná osa je opět dělena logaritmicky, svislá osa lineárně. Na nízkých kmitočtech vychází argumentová charakteristika z nuly, na vysokých kmitočtech se asymptoticky blíží k -90°.

Kritickým bodem na obou charakteristikách je **mezní kmitočet** obvodu $\omega = \omega_{mez} = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{\tau}$. Na tomto kmitočtu je modul činitele přenosu roven $K_u(\omega_{mez}) = 1/\sqrt{2}$, což odpovídá -3 dB (přesně vzato -10log(2)= -3.0103... dB) a fázový úhel mezi výstupním a vstupním napětím je -45°.

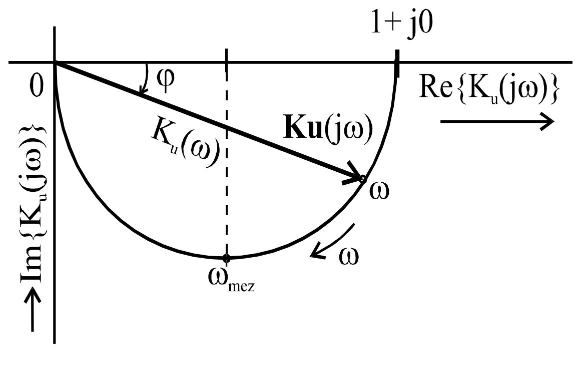


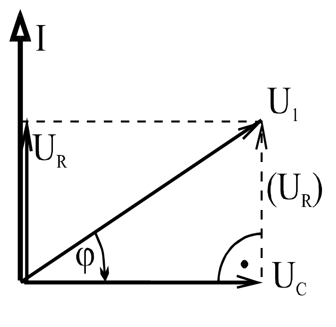
Obrázek 3.8.4 RC článek

Z průběhu charakteristik vyplývá :

- Na nízkých kmitočtech, kdy $\omega << \omega_{mez}$, je přenos prakticky roven jedné a procházející signál není integračním článkem ovlivněn. Článek se chová jako **kmitočtový filtr typu dolní propust.**- Na vysokých kmitočtech, kdy $\omega >> \omega_{mez}$, je přenos velmi malý a klesá nepřímo úměrně s rostoucím kmitočtem, $K_u \doteq \dfrac{1}{\omega RC} = \dfrac{\omega_{mez}}{\omega} << 1$. Výstupní napětí je zpožděno oproti napětí na vstupu o 90°. Pokud všechny kmitočtové složky obsažené v signálu leží v této oblasti, je splněna podmínka $u_2(t) << u_1(t)$ a článek působí jako téměř dokonalý integrátor.

Na obr.3.8 -5 je zobrazena závislost napětí $K_u(j\omega)$ na kmitočtu (závislost imaginární části činitele přenosu na jeho reálné části), tzv. hodograf. Hodograf má tvar půlkružnice, úhlový kmitočet je proměnným parametrem. Vychází z bodu +1+j0 na reálné ose (pro kmitočet ω=0) a končí





Obrázek 3.8.5 Hodograf RC článku **Obrázek 3.8.6 Fázorový diagram**

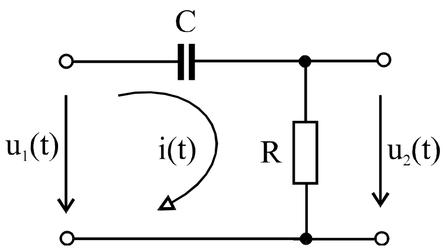
v počátku pro kmitočet $\omega \to \infty$). Meznímu kmitočtu obvodu odpovídá bod s největší zápornou imaginární částí. Pro každý kmitočet je modul přenosu dán délkou spojnice příslušného bodu na hodografu s počátkem souřadnic a argument úhlem, který tato spojnice svírá s reálnou osou. Fázorový diagram (obr.3.8 -6) odráží vzájemné vztahy mezi fázory obvodu

$$\mathbf{U_1} = \mathbf{U_R} + \mathbf{U_2} = \mathbf{U_R} + \mathbf{U_C} = R\mathbf{I} + \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}.$$

Napětí na rezistoru je ve fázi s proudem, napětí na kondenzátoru se zpožďuje o 90°. Součet obou fázorů je pak konstantní a je roven fázoru napětí na vstupu obvodu. Proto bod, ve kterém na sebe fázory $\mathbf{U_R}$ a $\mathbf{U_C}$ navazují, leží na půlkružnici opsané nad fázorem vstupního napětí $\mathbf{U_1}$.

Poznamenejme ještě, že integrační článek může být do cesty signálu zařazen záměrně s cílem omezit šířku pásma signálu. Často však bývá tvořen parazitními prvky v obvodu, např. konečným vnitřním odporem zdroje signálu a nevyhnutelně přítomnými kapacitami připojených prvků. Pak dochází k nežádanému omezení přenášeného pásma, které musíme vhodným způsobem řešit.

3.8.2 Derivační článek RC



Obrázek 3.8.7 Derivační článek

Odebíráme-li výstupní napětí ze svorek rezistoru uvedené sériové kombinace, dostaneme zapojení nazývané kvaziderivační resp. vazební článek. Schéma článku je na obr.3.8 -7.

Pro okamžitou hodnotu výstupního napětí platí

$$u_2(t) = R.i(t) = RC\frac{d}{dt}[u_1(t) - u_2(t)].$$

Je-li splněna podmínka $u_2(t) << u_1(t)$, platí přibližně

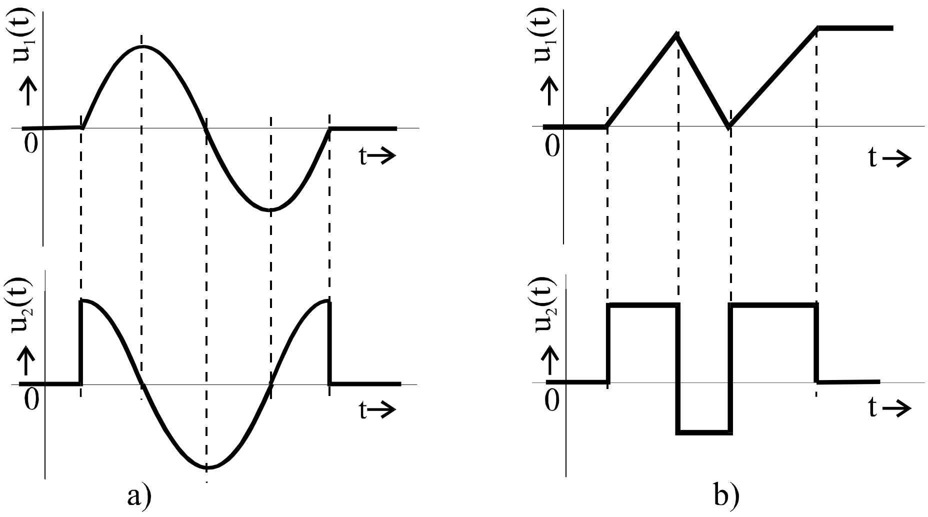
$$u_2(t) \doteq RC\frac{du_1(t)}{dt} \qquad (3.8\ \text{-}9)$$

a článek derivuje vstupní napětí podle času. Dva příklady průběhů vstupního a výstupního napětí pro tento případ jsou nakresleny na obr.3.8-8. Má-li článek skutečně signál derivovat, musí být jeho vstupní napětí spojitou funkcí času. V okamžicích nespojitosti roste totiž derivace nade všechny meze a na výstupu článku nemůže již tedy být signál odpovídající derivaci vstupního napětí. Přenos napětí derivačního článku v harmonickém ustáleném stavu může být opět vyjádřen jako

$$\mathbf{K_u}(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \qquad (3.8\ \text{-}10)$$

a odpovídající modul a argument napěťového přenosu

$$K_u(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \varphi(\omega) = 90° - arctg\,\omega RC. \qquad (3.8\ \text{-}11)$$



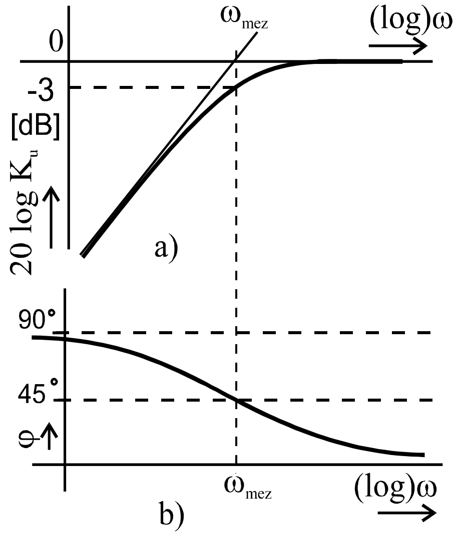
Obrázek 3.8.8 Funkce CR článku

Kmitočtové charakteristiky obvodu (modulová a argumentová) jsou nakresleny na obr.3.8 - 9a,b. Z nich je zřejmé, že článek nepropustí stejnosměrnou složku a složky signálu o nízkých kmitočtech, působí tedy **jako filtr typu horní propust** s mezním kmitočtem rovným

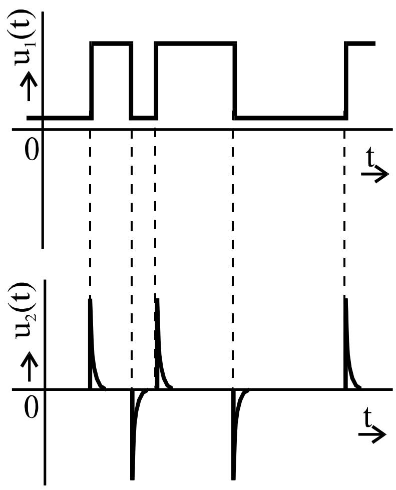
$$\omega_{mez} = 1/RC = 1/\tau \, . \tag{3.8 -12}$$

Proto se často používá k vazbě mezi jednotlivými stupni zesilovačů nebo na vstupu osciloskopu či voltmetru, chceme-li měřit malý střídavý signál, superponovaný na značně větší stejnosměrnou složku (např. signál na kolektoru tranzistoru). Časovou konstantu článku musíme přitom volit dostatečně velikou, aby jeho mezní kmitočet byl podstatně nižší než nejnižší kmitočty obsažené v signálu.

Použijeme-li malou časovou konstantu, můžeme článku použít k vytvoření krátkých "jehlových" impulsů v okamžicích, kdy se vstupní signál mění skokem. Impuls na výstupu je kladný, jestliže vstupní signál vzrostl, záporný, když vstupní signál skokem klesl. Ukazuje to obr.3.8-10. Výstupní impuls má amplitudu rovnou velikosti skokové změny na vstupu a je tím kratší, čím menší je časová konstanta obvodu $\tau = RC$.



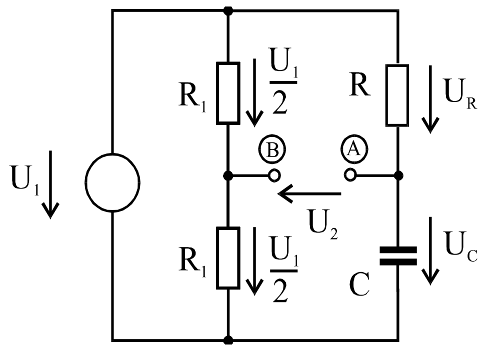
Obrázek 3.8.9 Kmitočtové charakteristiky



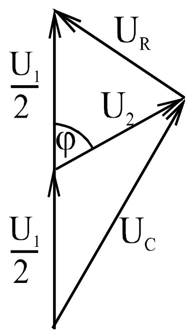
Obrázek 3.8.10 Funkce CR článku

3.8.3 Všepropustný článek RC

Pro účely korekce fáze signálů se používá článek, jehož základní schéma je na obr.3.8 - 11. Vstupní signál je označen jako $\mathbf{U_1}$, výstupní napětí $\mathbf{U_2}$ se odebírá mezi uzly A a B.



Obrázek 3.8.11 Všepropustný článek RC



Obrázek 3.8.12 Fázor. diagram

Předpokládáme přitom, že z výstupních svorek není odebírán žádný proud. Dělič ze stejně velikých odporů vytváří mezi uzlem B a referenčním uzlem napětí rovné polovině napětí na vstupu. Napětí v uzlu A, rovné napětí na kondenzátoru je

$$U_C = U_1 \frac{1}{1 + j\omega RC} \ . \tag{3.8 -13}$$

Výstupní napětí obvodu je pak

$$\mathbf{U_2} = \mathbf{U_C} - \frac{1}{2}\mathbf{U_1} = \mathbf{U_1}\frac{1}{1+j\omega RC} - \frac{\mathbf{U_1}}{2} = \frac{\mathbf{U_1}}{2} . \frac{1-j\omega RC}{1+j\omega RC} = \frac{\mathbf{U_1}}{2} e^{j(-2arctg\omega RC)} . \tag{3.8 -14}$$

Modul činitele přenosu je roven jedné polovině a nezávisí na kmitočtu. Fázový úhel mezi výstupním a vstupním napětím je

$$\varphi(\omega) = -2arctg(\omega RC) \tag{3.8 -15}$$

Článek tedy přenáší se stejným modulem činitele přenosu všechny signály v celém rozsahu od nuly do nekonečna, a mění přitom fázi procházejícího signálu v závislosti na kmitočtu.
Činnost obvodu názorně dokládá fázorový diagram na obr.3.8 -12. Pro napětí v obvodu platí

$$\mathbf{U_1} = 2\frac{\mathbf{U_1}}{2} = \mathbf{U_R} + \mathbf{U_C} \ , \tag{3.8 -16}$$

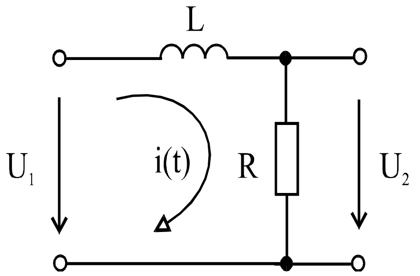
$$\mathbf{U_2} = \mathbf{U_C} - \frac{1}{2}\mathbf{U_1} \ . \tag{3.8 -17}$$

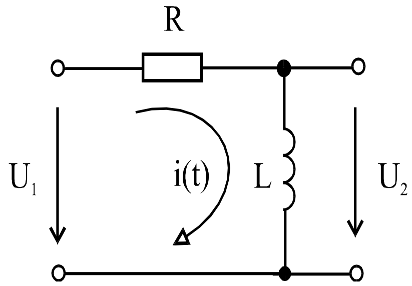
Koncový bod fázoru výstupního napětí $\mathbf{U_2}$ se pohybuje po půlkružnici se středem uprostřed fázoru vstupního napětí $\mathbf{U_1}$ a proto jeho délka zůstává konstantní. Úhel mezi fázorem vstupního a výstupního napětí se v závislosti na kmitočtu mění v rozmezí od nuly při $\omega = 0$ do 180 stupňů v limitě pro $\omega \to \infty$.

3.8.4 Integrační a derivační články RL

Podobné vlastnosti jako články RC mají i obvody s rezistorem a induktořem, nakreslené na obr.3.8 -13,14. Pro integrační článek na obr.3.8 -13 odvodíme napěťový přenos

$$\mathbf{K_u}(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \ . \qquad (3.8\text{-}18)$$





Obrázek 3.8.13 Integrační LR článek **Obrázek 3.8.14 Derivační RL článek**

Výraz pro přenos napětí je tedy stejný jako u integračního článku RC a proto i kmitočtové charakteristiky jsou stejné. Podobně i přenos derivačního článku RL (obr.3.8 -14) je

$$\mathbf{K_u}(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \ , \qquad (3.8\text{-}19)$$

odpovídá přenosu derivačního článku RC. V obou výrazech pro přenos je τ časová konstanta určená parametry prvků obvodu

$$\tau = \frac{L}{R} \ . \qquad (3.8\text{-}20)$$

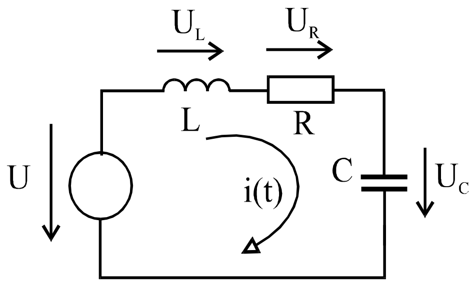
Při praktickém použití článků RL působí problémy ztrátový odpor cívky snižující její kvalitu a především její parazitní kapacity. Proto se obvodů RL používá zřídka, spíše se s nimi setkáváme jako s obvody parazitními.

Obvody 2. řádu

Obvody 2. řádu obsahují dva akumulační prvky a jsou proto popsány diferenciální rovnicí 2. řádu. Nejzajímavější jsou obvody s jedním kapacitorem a jedním induktorem, tzv. rezonanční obvody.

3.8.5 Sériový rezonanční obvod

Schéma sériového rezonančního obvodu je na obr.3.8-15. Obvod je napájen ze zdroje napětí **U** a teče jím proud **I**. Pro impedanci obvodu platí



Obrázek 3.8.15 RLC obvod

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \ . \qquad (3.8\text{-}21)$$

Modul impedance

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \qquad (3.8\text{-}22)$$

je minimální a impedance je současně čistě reálná, reaktance cívky ωL rovna reaktanci kondenzátoru $1/\omega C$, tedy pro kmitočet $\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, *resp.* $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, (3.8 -23)

kdy je **obvod v rezonanci**.
Pro fázor proudu obvodem v závislosti na kmitočtu odvodíme

$$\mathbf{I}(j\omega) = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}(j\omega)} = \mathbf{U}\frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \ . \qquad (3.8\ \text{-}24)$$

Při rezonanci je proud maximální $I_r = \frac{U}{R}$ a je ve fázi s napájecím napětím. Když výraz pro proud ze vztahu (3.8 -24) upravíme tak, že čitatele i jmenovatele dělíme odporem R a ze závorky ve jmenovateli vytkneme reaktanci induktoru resp. kapacitoru při rezonanci $\omega_r L = 1/\omega_r C$, dostaneme

$$\mathbf{I}(j\omega) = \frac{\mathbf{U}/R}{1 + j\frac{\omega_r L}{R}(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega})} = \frac{I_r}{1 + jQF} \ .$$

Ve jmenovateli jsme zavedli označení (bezrozměrné veličiny)

činitel jakosti obvodu $Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ a (3.8 -25)

činitel rozladění $F = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f}$. (3.8 -26)

Činitel jakosti je tím větší, čím menší je **odpor** R. Ten obvykle do rezonančního obvodu úmyslně nezařazujeme. Představuje nevyhnutelné **ztráty v obvodu**, především ztráty v cívce, působené ohmickým odporem vodiče a případným vlivem povrchového jevu (skinefektu). Hodnota činitele jakosti závisí na provedení cívky, použitém jádru a kmitočtu, při kterém ho určujeme. Běžně nabývá hodnot 20 – 50, při pečlivém provedení cívky však může dosáhnout až několika set.
Činitel rozladění je roven nule při rezonanci, je záporný pod rezonančním kmitočtem a kladný nad rezonančním kmitočtem. V blízkosti rezonančního kmitočtu můžeme psát

$$f = f_r + \Delta f \, , \qquad (3.8\ \text{-}27)$$

kde Δf je absolutní rozladění od rezonance.
Pro činitele rozladění pak máme

$$F = \frac{f_r + \Delta f}{f_r} - \frac{f_r}{f_r + \Delta f} = (1 + \frac{\Delta f}{f_r}) - (1 - \frac{\Delta f}{f_r})^{-1} \ . \qquad (3.8\ \text{-}28)$$

Výraz ve druhé závorce rozvineme v binomickou řadu a protože předpokládáme, že relativní rozladění $\Delta f / f_r$ je malé, vezmeme z ní pouze dva první členy. Pak platí přibližně

$$F \doteq 1 + \frac{\Delta f}{f_r} - (1 - \frac{\Delta f}{f_r}) = 2\frac{\Delta f}{f_r} \ , \qquad (3.8\ \text{-}29)$$

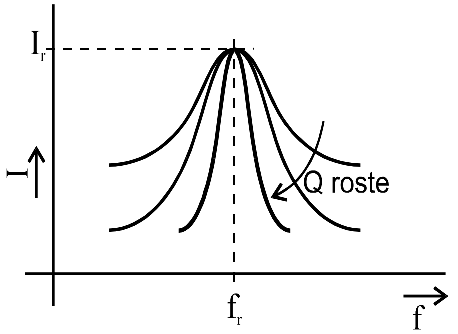
činitel rozladění je přímo úměrný odchylce od rezonančního kmitočtu (absolutnímu rozladění $\Delta f = f - f_r$).

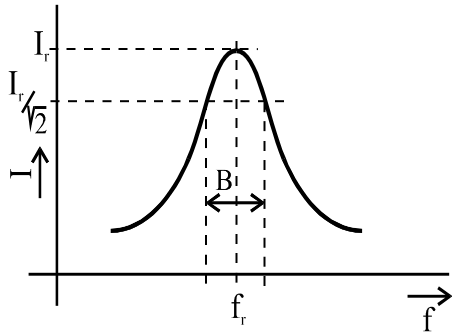
Závislost modulu proudu I na kmitočtu se nazývá **rezonanční křivka** obvodu

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 F^2}} \ . \qquad (3.8\ \text{-}30)$$

Její tvar závisí na činiteli jakosti obvodu Q, jak je zřejmé z křivek na obr.3.8 -14. Při velkém činiteli jakosti je křivka úzká a má strmé boky. Proud při rozladění od rezonančního kmitočtu rychle klesá, obvod je **selektivní**. Je schopen výběru těch složek proudu, které mají kmitočty v těsné blízkosti rezonančního kmitočtu.

Pro posouzení selektivity obvodu definujeme **šířku pásma propustnosti** *B* jako pásmo kmitočtů, ve kterém modul proudu neklesne pod hodnotu $I_r/\sqrt{2}$, tj. o více než 3 decibely





Obrázek 3.8.16 Rezonanční křivky **Obrázek 3.8.17 Šířka pásma B**

pod maximum, dosahované při rezonanci (viz obr.3.8 -17).
Na obou krajních kmitočtech pásma propustnosti platí *QF=1*. Je-li činitel jakosti dostatečně vysoký, je rezonanční křivka úzká a téměř symetrická kolem rezonančního kmitočtu. Pak platí

$$QF = 1 \doteq Q\frac{2\Delta f}{f_r} = Q\frac{B}{f_r} \tag{3.8 -31}$$

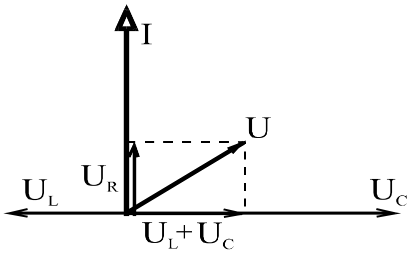
a šířka pásma propustnosti B je nepřímo úměrná činiteli jakosti okruhu

$$B \doteq \frac{f_r}{Q} \; . \tag{3.8 -32}$$

Vztahy mezi fázory v obvodu názorně ilustruje fázorový diagram (obr.3.8 -16). Pro fázory napětí na jednotlivých prvcích platí

$$\mathbf{U_R} = R.\mathbf{I}, \;\; \mathbf{U_L} = j\omega L.\mathbf{I} \;, \;\; \mathbf{U_C} = -j\frac{1}{\omega C}.\mathbf{I}, \;\; \mathbf{U} = \mathbf{U_R} + \mathbf{U_C} + \mathbf{U_L} \;.$$

Fázor napětí na rezistoru je ve fázi s proudem, fázory napětí na akumulačních prvcích svírají s fázorem proudu úhel rovný 90 stupňům. Při rezonanci jsou absolutní hodnoty napětí na induktoru a kapacitoru stejně veliké, takže se v součtu vzájemně ruší a celkové napětí na okruhu je rovno napětí na rezistoru. Potom jsou fázory obvodu



$$\mathbf{I_r} = \frac{\mathbf{U}}{R}, \;\; \mathbf{U_R} = \mathbf{U},$$

$$\mathbf{U_L} = j\omega_r L\mathbf{I_r} = j\frac{\omega_r L}{R}\mathbf{U} = jQ\mathbf{U},$$

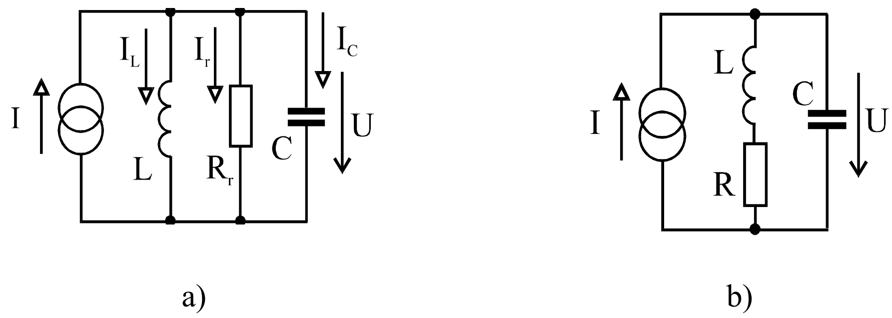
$$\mathbf{U_C} = -\mathbf{U_L} = -jQ\mathbf{U}$$

Obrázek 3.8.18 Fázorový diagram

Modul napětí na akumulačních prvcích při rezonanci je *Q* krát větší než modul napájecího napětí. (Této skutečnosti se využívá při měření činitele jakosti reálného obvodu.)

3.8.6 Paralelní rezonanční okruh

Při rozboru vlastností paralelního rezonančního okruhu budeme rozlišovat dva případy - teoretickou a praktickou variantu obvodu. Základní schéma paralelního rezonančního okruhu (teoretické varianty) je nakresleno na obr.3.8 -19a. Okruh je napájen zdrojem proudu a skládá se ze tří paralelních větví s kapacitorem C, induktorem L a tzv. rezonančním odporem R_r,



Obrázek 3.8.19 Paralelní rezonanční okruh

který představuje ztráty v obvodu. Pro napětí na okruhu platí

$$\mathbf{U}(\mathbf{j}\omega) = \frac{\mathbf{I}}{\frac{1}{R_r} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{Y}(j\omega)} . \qquad (3.8\,\text{-}33)$$

Při rezonanci, kdy stejně jako u sériového okruhu je reaktance induktoru rovna reaktanci kapacitoru, je napětí na okruhu ve fázi s proudem zdroje a má maximální hodnotu rovnou

$$\mathbf{U}_\mathbf{r} = R_r \mathbf{I} . \qquad (3.8\,\text{-}34)$$

Mimo rezonanci můžeme opět psát

$$\mathbf{U}(\mathbf{j}\omega) = \frac{\mathbf{U}_\mathbf{r}}{1 + jQF} . \qquad (3.8\,\text{-}35)$$

Pro činitele rozladění F platí stejné vztahy jako v případě sériového okruhu, pro činitele jakosti však máme

$$Q = \omega_r C R_r = \frac{R_r}{\omega_r L} = R_r \sqrt{\frac{C}{L}} . \qquad (3.8\,\text{-}36)$$

Činitel jakosti je přímo úměrný velikosti rezonančního odporu, který modeluje ztráty reálné cívky a kondenzátoru obvodu. Ideální bezeztrátový okruh by měl nekonečně veliký rezonanční odpor.

Rezonanční křivka paralelního rezonančního okruhu je graf závislosti modulu napětí U na kmitočtu. Pro šířku pásma propustnosti platí opět vztah (3.8 -32) .

Při praktické realizaci paralelního rezonančního okruhu zapojíme paralelně kondenzátor s cívkou, odpor paralelně obvykle nedáváme. Zapojení tak představuje **praktickou variantu** okruhu, jejíž schéma je na obr.3.8 -19b. Ztráty jsou v tomto schématu respektovány odporem R v sérii s indukčností cívky. Ztráty v kondenzátoru jsou totiž obvykle proti ztrátám v cívce zanedbatelné. Pro napětí na okruhu platí

$$\mathbf{U}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{I}\frac{(R + j\omega L)\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \mathbf{I}\frac{\frac{L}{C} + \frac{R}{j\omega C}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \mathbf{I}\frac{\frac{L}{CR} + \frac{1}{j\omega C}}{1 + jQF} . \qquad (3.8\,\text{-}37)$$

Zajímá nás především situace v okolí rezonančního kmitočtu. Je-li činitel jakosti okruhu dostatečně velký, tedy značně větší než jednotka, potom platí

$$\frac{1}{\omega_r C} << \frac{L}{CR}, \text{ tj. } \frac{\omega_r L}{R} = Q >> 1 , \qquad (3.8\,\text{-}38)$$

a druhý zlomek v čitateli výrazu pro napětí můžeme zanedbat. Dostaneme tak výraz shodný se vztahem platným pro napětí na paralelním okruhu z obr.3.8-19a (teoretická varianta)

$$\mathbf{U}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{I}\frac{R_r}{1 + jQF}, \tag{3.8 -39}$$

kde rezonanční odpor je

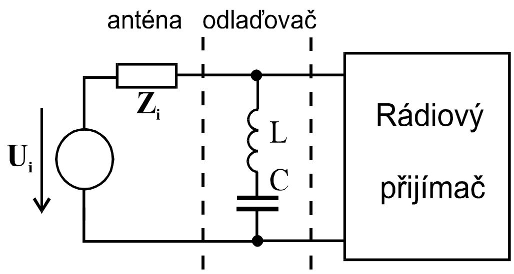
$$R_r = \frac{L}{CR} = \omega_r LQ = \frac{Q}{\omega_r C} \;. \tag{3.8 -40}$$

Rezonanční odpor R_r je, jak jsme očekávali, nepřímo úměrný sériovému odporu cívky R. Jestliže se hodnoty sériového odporu v praxi pohybují řádově v ohmech nebo desítkách ohmů, rezonanční odpory bývají řádu desítek až stovek kiloohmů.

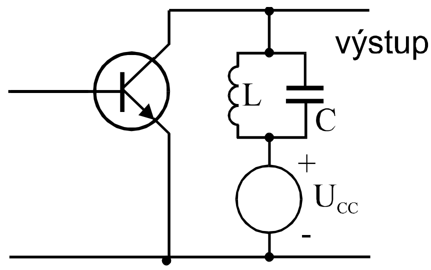
3.8.7 Použití rezonančních obvodů

Sériové a paralelní rezonanční obvody lze použít jako kmitočtové filtry typu pásmové propusti nebo pásmové zádrže.

Na obr.3.8 -20 je příklad použití sériového rezonančního okruhu na vstupu rádiového přijímače jako tzv. odlaďovače. Kmitavý okruh spolu s vnitřní impedancí zdroje signálu (antény) tvoří impedanční dělič. Na rezonančním kmitočtu představuje okruh velmi malý odpor, proto je napěťový přenos děliče je malý. Když rezonanční okruh naladíme na kmitočet nežádoucího - rušícího signálu (např. silné místní stanice), potlačí se rušení a přitom se prakticky neovlivní příjem na ostatních kmitočtech.

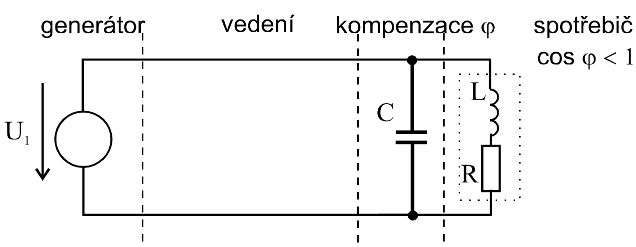


Obrázek 3.8.20 Sériový RLC obvod



Obrázek 3.8.21 Paralelní RLC obvod

Schéma na obr.3.8 -21 ukazuje příklad použití paralelního rezonančního okruhu jako zatěžovací impedance tranzistorového zesilovacího stupně. Protože zesílení stupně je tím větší, čím větší je impedance v kolektorovém obvodu tranzistoru, zesilovač je selektivní, zesiluje nejvíce signály o kmitočtu, na který je okruh naladěn a v pásmu propustnosti okruhu kolem tohoto kmitočtu.



Obrázek 3.8.22 Princip kompenzace

Rezonance se využívá i v silnoproudé elektrotechnice ke kompenzaci účiníku. Většinu elektrické energie u velkých odběratelů spotřebují elektrické asynchronní motory, které představují pro napájecí síť zátěž induktivního charakteru. Aby se jalový proud zmenšil, zapojují se paralelně k velkým spotřebičům kondenzátorové baterie, jak je znázorněno na obr.3.8 -22. Tím se soustava jako celek uvede přibližně do rezonance na síťovém kmitočtu. Činitel jakosti takové rezonanční soustavy je ovšem malý. (Princip kompenzace názorně ilustruje srovnání výsledků analýzy obvodů z příkladů 3.7 -4 a 3.7 -5 minulého odstavce.)

3.8.8 Shrnutí podkapitoly 3.8

Obvody RC a RL prvního řádu mohou být používány podle zapojení a podle oblasti práce (určené poměrem pracovního a mezního kmitočtu článku) jako články přenosové, kvaziintegrační , kvaziderivační., nebo fázovací. V praxi jsou využívané jako jednoduché filtry dolních nebo horních propustí. V řadě zapojení vznikají jako důsledek parazitních projevů reálných prvků a obvodů a mohou výrazně ovlivňovat jejich výsledné přenosové vlastnosti.

Obvody RLC druhého řádu se využívají nejčastěji jako sériové nebo rezonanční obvody. Jsou využívané jako filtry pásmových propustí nebo zádrží.

3.8.9 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 3.8

Příklad 3.8-1:

Na vstup integračního RC článku (R=100 Ω, C=100 nF) je přiváděno harmonické napětí o amplitudě 1 V : $u_1(t) = U_m \sin(\omega t) = 1 \sin(\omega t)$ *[V]*. Určete oblast práce článku a výstupní napětí článku pro kmitočty a) f=160 Hz, b) f=1600 Hz, c) f= 16 000 Hz.

Příklad 3.8-2:

Na vstup derivačního CR článku (R=100 Ω, C=100 nF) je přiváděno harmonické napětí o amplitudě 1 V : $u_1(t) = U_m \sin(\omega t) = 1 \sin(\omega t)$ *[V]*. Určete oblast práce článku a výstupní napětí článku $u_2(t)$ pro kmitočty a) f=160 Hz, b) f=1600 Hz, c) f= 16 000 Hz.

Příklad 3.8-3:

Na vstup sériového RLC obvodu (R=10 Ω, L= 1 mH, C=100 nF) je přiváděno harmonické napětí o amplitudě 1 V : $u_1(t) = U_m \sin(\omega t) = 1 \sin(\omega t)$ *[V]*. Určete rezonanční kmitočet obvodu f_0, proud obvodem a napětí na jednotlivých prvcích obvodu pro kmitočty a) f=15,9155kHz, b) f=159 kHz, c) f= 1,59 kHz.

4 Trojfázové obvody

Cíle kapitoly: Seznámení se základními vlastnostmi vícefázových (jmenovitě trojfázových) soustav. Objasnění vlastností zapojení trojfázových zdrojů a spotřebičů do hvězdy a do trojúhelníka, výpočet výkonu ve trojfázových soustavách.Vysvětlení a na ukázkových příkladech objasnění základních metod řešení vícefázových (zejména trojfázových) soustav souměrných i nesouměrných.

Test předchozích znalostí:

Příklad 4-1

a) Efektivní hodnota napětí je U=150 V, jaká je hodnota amplitudy U_m ?

b) Amplituda proudu je I_m =2,5 A, jaká je efektivní hodnota proudu I ?

Příklad 4-2

Okamžitá hodnota napětí je

$u(t) = U_m \sin(\omega t t + \varphi) = 325 \sin(314{,}1593\,t + 2{,}094)$,vyjádřete fázor tohoto napětí v měřítku amplitud a v měřítku efektivních hodnot.

Příklad 4-3

a) Fázory napětí jsou : $\mathbf{U}_1$=120 $e^{j30°}$ [V], $\mathbf{U}_2$=80 $e^{j20°}$ [V] . Určete jejich součet a rozdíl.

b) Fázor proudu tekoucí impedancí **Z** = 10 +j30 [Ω] je **I**=1,2 $e^{j40°}$[A], vypočtěte fázor napětí na impedanci **U** a okamžitou hodnotu napětí u(t)

Úvod

Trojfázové obvody mají základní význam v elektroenergetice při výrobě, rozvodu a užití elektrické energie. Trojfázový proud umožňuje totiž vytvoření točivého magnetického pole, které je základem působení trojfázových indukčních motorů, nejjednodušších a proto i nejrozšířenějších motorů vůbec. Při přenosu energie trojfázovým vedením se ušetří na materiálu vodičů a také trojfázové generátory jsou funkčně jednodušší a váhově lehčí než jednofázové stejných výkonů. Rovněž trojfázové transformátory jsou ekonomičtější než jednofázové.

4.1 Mnohofázové soustavy - základní pojmy a vztahy

Harmonické zdroje napětí a proudu, které jsme dříve uvažovali, nazýváme též jednofázovými zdroji. V energetice se však používají složitější zdroje elektrické energie: *m*-fázové zdroje. Jsou to zařízení, kde je v jediném konstrukčním celku uspořádáno *m* jednofázových zdrojů harmonického napětí, které mají stejný kmitočet a jejich napětí jsou $u_1(t),\ u_2(t),\ u_3(t), \ldots u_m(t)$. Zpravidla jsou navrženy tak, že $U_1=U_2=U_3=\ldots=U_m$ a každá dvojice po sobě následujících napětí má fázový posun $\alpha = 2\pi/m$. Pak je nazýváme souměrnými *m*-fázovými zdroji. Nejsou-li splněny obě uvedené podmínky (např. při poruše některého zdroje), jde o nesouměrný *m*-fázový zdroj.

Svorky *m*-fázového zdroje jsou mezi sebou vhodným způsobem propojeny, takže zdroj je do obvodu zapojen nikoliv všemi svými *2m* svorkami, ale pouze *m* nebo *m+1* svorkami. Tyto *m*-fázové zdroje jsou zapojeny do *m*-fázového systému pro přenos elektrické energie. Podstatnou částí tohoto systému je *m*-fázové vedení (*m*-fázová síť), tvořené *m* nebo *m+1* vodiči, jimiž se přenáší elektrická energie ke spotřebičům. Celek pak nazýváme *m*-fázovým obvodem. Jakýchkoliv *m* harmonických veličin (napětí nebo proudů) *m*-fázového obvodu tvoří *m*-fázovou soustavu těchto veličin, jež je buďto souměrná nebo nesouměrná.

Větve *m*-fázového obvodu, na nichž jsou napětí (resp. jimiž procházejí proudy) *m*-fázové soustavy, nazýváme fázemi.

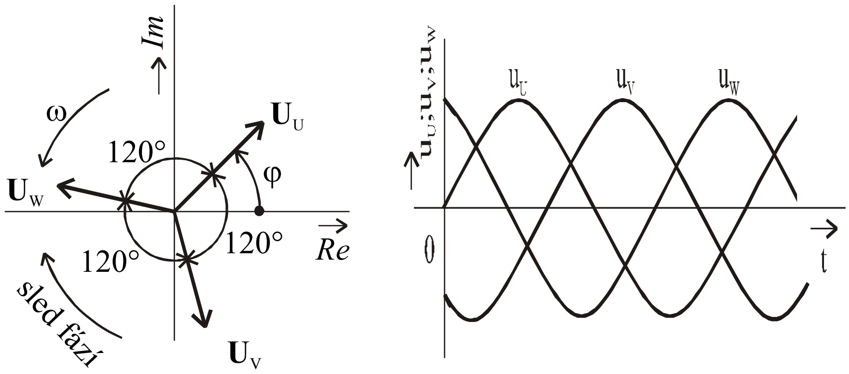
4.1.1 Trojfázová soustava

Trojfázová soustava veličin (napětí nebo proudů) $u_U(t),\ u_V(t),\ u_W(t)$, jež jsou reprezentovány svými fázory $\boldsymbol{U}_U, \boldsymbol{U}_V, \boldsymbol{U}_W$ je *souměrná*, mají-li tyto veličiny stejnou efektivní hodnotu $U_U=U_V=U_W=U_f$ (U_f nazýváme fázovou veličinou) a jejich vzájemný fázový posun je $2\pi/3$. Je tedy:

$$\begin{aligned} u_U(t) &= \sqrt{2}U_f \sin(\omega t + \varphi), \\ u_V(t) &= \sqrt{2}U_f \sin(\omega t - 120^\circ + \varphi), \\ u_W(t) &= \sqrt{2}U_f \sin(\omega t + 120^\circ + \varphi). \end{aligned} \tag{4.1-1}$$

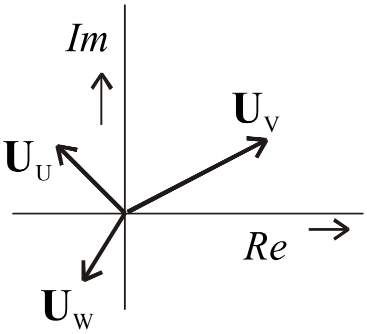
Nejsou-li splněny obě tyto podmínky, jde o *nesouměrnou* trojfázovou soustavu. Pořadí, v němž veličiny trojfázové soustavy nabývají svého maxima, nazýváme sledem fází. Značíme jej posloupností po sobě následujících indexů.

Na obr.4.1-1 je fázorový diagram souměrné trojfázové soustavy napětí spolu s jejich časovým průběhem, pro nějž platí rovnice (4.1-1).



Obrázek 4.1.1 Fázorový diagram a časový průběh souměrné trojfázové soustavy napětí

Sled fází této trojfázové soustavy je *U, V, W*. Na obr.4.1-2 je fázorový diagram nesouměrné trojfázové soustavy napětí (není u ní splněna žádná z obou podmínek souměrnosti).



Obrázek 4.1.2 Fázorový diagram nesouměrné trojfázové soustavy napětí

Trojfázovou soustavu, pro niž platí : $u_U(t) + u_V(t) + u_W(t) = 0$, (4.1-2)
čili pro jejíž fázory platí

$$\mathbf{U}_U + \mathbf{U}_V + \mathbf{U}_W = 0, \tag{4.1-3}$$

nazýváme ***vyváženou.*** Soustava, pro niž tyto vztahy neplatí, je ***nevyvážená***.

4.1.2 Matematické vyjádření veličin souměrné trojfázové soustavy

Trojice fázorů souměrné trojfázové soustavy se často vyjadřuje pomocí jediného fázoru $\boldsymbol{U}_U$:

$$\mathbf{U}_V = \mathbf{U}_U\, e^{-j2\pi/3} = \mathbf{U}_U\, e^{+j4\pi/3}, \qquad \mathbf{U}_W = \mathbf{U}_U e^{-j4\pi/3} = \mathbf{U}_U\, e^{+j2\pi/3}. \tag{4.1-4}$$

Jelikož v teorii trojfázových obvodů často pracujeme s výrazem $e^{j2\pi/3}$, zavádíme pro něj název ***operátor natočení*** a jednodušší označení

$$\boldsymbol{a} = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{4.1-5}$$

Pak zřejmě je

$$\boldsymbol{a}^2 = e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{4.1-6}$$

Z předešlých výrazů vyplývá, že platí vztah

$$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a} + 1 = 0. \tag{4.1-7}$$

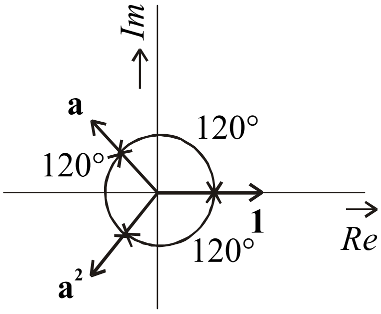
Z obr.4.1-3 je patrné, že platí:

$$\begin{aligned} &1 = \boldsymbol{a}^3 = \boldsymbol{a}^6 = \dots = \boldsymbol{a}^{-3} = \boldsymbol{a}^{-6} = \dots \\ &\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^4 = \boldsymbol{a}^{ý} = \dots = \boldsymbol{a}^{-2} = \boldsymbol{a}^{-5} = \dots \\ &\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}^5 = \boldsymbol{a}^8 = \dots = \boldsymbol{a}^{-1} = \boldsymbol{a}^{-4} = \dots \end{aligned} \tag{4.1-8}$$

S použitím operátoru natočení lze vyjádřit vztahy (4.1- 4) přehledněji:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{U}_U \\ &\boldsymbol{U}_V = \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{U}_U, \\ &\boldsymbol{U}_W = \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{U}_U. \end{aligned} \tag{4.1-9}$$

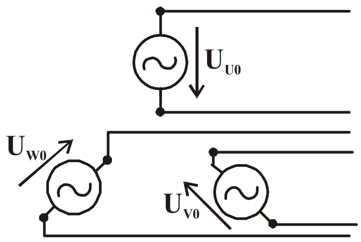
S použitím rovnic (4.1-7) a (4.1-9) dostáváme (4.1-3), tzn., že *souměrná trojfázová soustava je vždy vyvážená*.

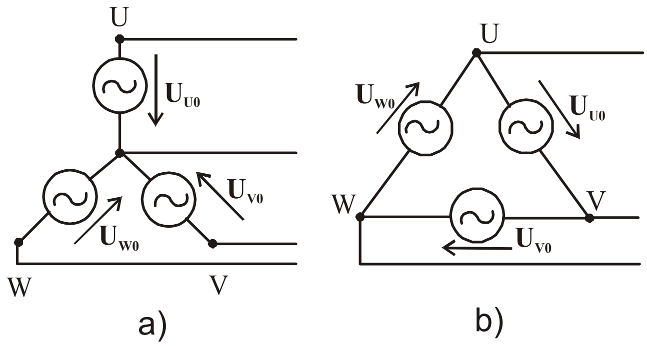


Obrázek 4.1.3 Zobrazení operátoru
a a a^2

4.1.3 Spojování trojfázových zdrojů

Má-li každý ze tří jednofázových zdrojů, jež dohromady tvoří trojfázový zdroj, samostatné dvouvodičové vedení, dostáváme *nevázanou soustavu*. Ke spojení zdroje se spotřebiči by bylo třeba šestivodičového vedení (obr.4.1-4). Vhodným spojením trojice zdrojů získáme *vázanou soustavu*, již spojíme se spotřebiči čtyřvodičovým nebo trojvodičovým vedením. Pro zhotovení vedení vázané soustavy, v porovnání s rovnocenným vedením nevázané soustavy, je třeba méně materiálu. Kromě toho lze u jedné z vázaných soustav odebírat dvojí napětí. Proto se v praxi výhradně používají vázané trojfázové soustavy. Zdroje spojujeme dvěma základními způsoby: nazýváme je spojením do hvězdy a spojením do trojúhelníka (obr.4.1-5.a, b).





Obrázek 4.1.4 Nevázaný trojfázový zdroj napětí

Obrázek 4.1.5 Vázané trojfázové zdroje : a) spojení do hvězdy, b) spojení do trojúhelníka

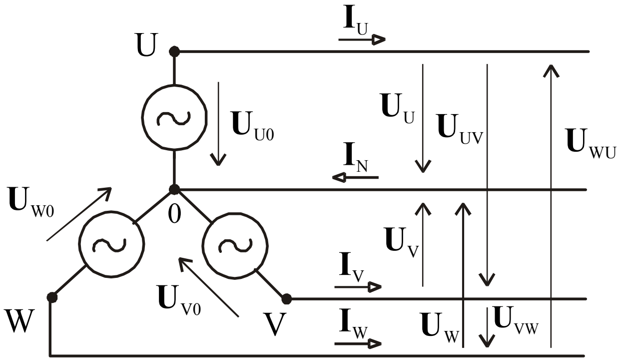
a) Spojení do hvězdy

Zdroje jsou jednou svorkou spojeny do uzlu, zvaného nulový bod (nebo stručně nula). Ke zbývající trojici svorek jsou připojeny fázové vodiče a z nulového bodu je obvykle vyveden nulový vodič. Zdroj tedy napájí čtyřvodičové vedení (obr.4.1-6), z něhož lze získat dvojí napětí: mezi fázovými vodiči a nulovým vodičem jsou ***fázová napětí*** U_U,

U_V, U_W a mezi dvojicemi fázových vodičů jsou ***sdružená napětí*** (někdy se nazývají též síťová napětí) U_{UV}, U_{VW}, U_{WU} . Spojení do hvězdy s vyvedeným nulovým vodičem má písmenové označení *YN* a s nevyvedeným vodičem označení *Y*.

Z druhého Kirchhoffova zákona plyne, že sdružená napětí lze vyjádřit pomocí fázových napětí vztahy :

$$\mathbf{U}_{UV} = \mathbf{U}_{U} - \mathbf{U}_{V}\,,$$
$$\mathbf{U}_{VW} = \mathbf{U}_{V} - \mathbf{U}_{W}\,, \tag{4.1-10}$$
$$\mathbf{U}_{WU} = \mathbf{U}_{W} - \mathbf{U}_{U}\,.$$

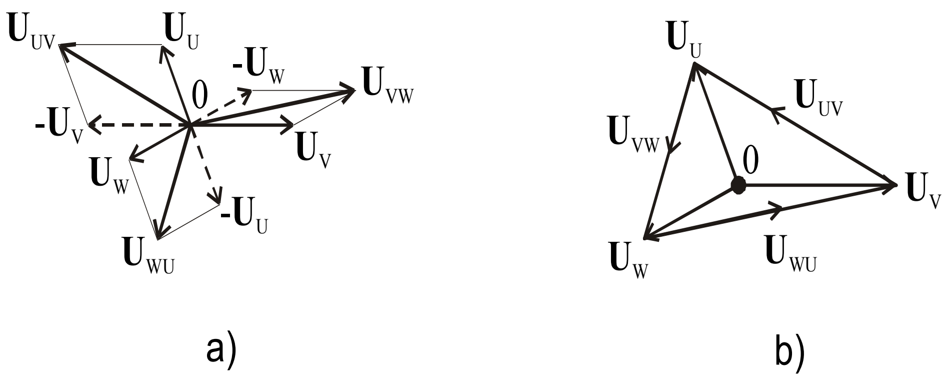


Obrázek 4.1.6 Fázová a sdružená napětí a proudy trojfázového zdroje spojeného do hvězdy

Sečtením rovnic (4.1-10) dostaneme důležitý vztah

$$\boldsymbol{U}_{UV} + \boldsymbol{U}_{VW} + \boldsymbol{U}_{WU} = 0\,, \tag{4.1-11}$$

podle něhož sdružená napětí tvoří vyváženou trojfázovou soustavu. (Topografickým diagramem sdružených napětí je trojúhelník, obr.4.1-7.b.



Obrázek 4.1.7 Diagramy nesouměrné trojfázové soustavy fázových a sdružených napětí- a) fázorový, b) topografický

Důležitý je případ, kdy soustava fázových napětí je souměrná. Pak též soustava sdružených napětí je souměrná. Moduly fázových napětí označíme $U_U = U_V = U_W = U_f$ a moduly sdružených napětí $U_{UV} = U_{VW} = U_{WU} = U_s$.

Z rovnice (4.1-9) a (4.1-10) pak plynou tyto vztahy mezi fázorem sdruženého napětí a fázorem fázového napětí:

$$\mathbf{U}_{UV} = \mathbf{U}_U - \mathbf{U}_V = \mathbf{U}_U - \mathbf{a}^2\mathbf{U}_U = \mathbf{U}_U(1-\mathbf{a}) = \sqrt{3}\mathbf{U}_U e^{j30^o}\,,$$

$$\mathbf{U}_{VW} = \mathbf{U}_V - \mathbf{U}_W = \mathbf{a}^2\mathbf{U}_U - \mathbf{a}\mathbf{U}_U = \mathbf{U}_U(\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}) = \sqrt{3}\mathbf{U}_U e^{-j90^o}\,, \tag{4.1-12}$$

$$\mathbf{U}_{WU} = \mathbf{U}_W - \mathbf{U}_U = \mathbf{a}\mathbf{U}_U - \mathbf{U}_U = \mathbf{U}_U(\mathbf{a}-1) = \sqrt{3}\mathbf{U}_U e^{j150^o}\,.$$

Pro efektivní hodnoty platí

$$U_s = \sqrt{3}U_f \,. \tag{4.1-13}$$

Fázorový a topografický diagram jsou na obr.4.1-7. Z nich je též zřejmá platnost rovnice (4.1-3). Z topografického diagramu, v němž fázory sdružených napětí tvoří rovnostranný trojúhelník, je zřejmé, že platí $½U_s = U_f \cos 30^o$, odkud plyne rovnice (4.1-13). Při nízkonapěťovém rozvodu elektrické energie se používá napětí $U_f = 220V$ (v poslední době 230 V), $U_s = \sqrt{3}U_f \doteq 380V$ (400 V). Tato napěťová soustava se obvykle značí 380/220 V resp. 400/230 V. Není-li vyveden nulový vodič, můžeme z této soustavy odebírat pouze jedno napětí - sdružené.

Připojíme-li na trojfázové vedení spotřebič, procházejí fázovými vodiči vedení proudy $\mathbf{I}_U$, $\mathbf{I}_V$, $\mathbf{I}_W$ a nulovým vodičem prochází proud $\mathbf{I}_N$. Aplikací prvního Kirchhoffova zákona na nulový bod *0* dostáváme

$$\mathbf{I}_U + \mathbf{I}_V + \mathbf{I}_W = \mathbf{I}_N \,.$$

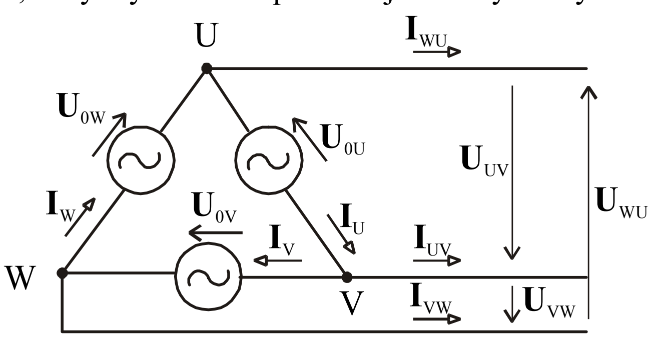
Pro souměrnou trojfázovou soustavu proudů $\mathbf{I}_U$, $\mathbf{I}_V$, $\mathbf{I}_W$, je podle rovnic (4.1-8) $\mathbf{I}_N = 0$ a nulový vodič není třeba. V praxi se vyžaduje vždy, když zátěž může být nesouměrná. V tomto případě totiž ani trojfázová soustava proudů není souměrná a nulový vodič se uplatňuje příznivě. Ze spojení na obr.4.1-6 je zřejmé, že modul sdruženého proudu I_s (tj. proud v každé fázi vedení) je roven modulu fázového proudu I_f (tj. proudu dodávanému jednotlivými zdroji).

$$I_s = I_f \,. \tag{4.1-14}$$

kde $I_f = I_U = I_V = I_W$.

b) Spojení do trojúhelníka

Trojice zdrojů je spolu spojena tak (obr.4.1-8), že tvoří smyčku, přičemž jedna svorka každého zdroje je spojena s další svorkou následujícího zdroje (obr.4.1-8).
Toto spojení lze uskutečnit jen pro vyvážený trojfázový zdroj (kdyby napětí zdrojů netvořilo vyváženou soustavu, nebyl by součet napětí zdrojů nulový a smyčkou tvořenou trojicí zdrojů



Obrázek 4.1.8 Fázová a sdružená napětí a proudy trojfázového zdroje spojeného do trojúhelníka

by procházel značný proud omezený pouze vnitřními impedancemi zdrojů). Napětí zdrojů je tedy též sdruženým napětím:

$$\mathbf{U}_U = \mathbf{U}_{UV},\ \mathbf{U}_V = \mathbf{U}_{VW},\ \mathbf{U}_W = \mathbf{U}_{WU}. \tag{4.1-15}$$

moduly fázových napětí jsou rovny modulům napětí sdružených

$$U_f = U_s\,. \tag{4.1-16}$$

Při zatížení trojfázového zdroje dodávají jeho fázové zdroje fázové proudy $\mathbf{I}_U$, $\mathbf{I}_V$, $\mathbf{I}_W$ a vodiči procházejí sdružené proudy:

$$\mathbf{I}_{UV} = \mathbf{I}_U - \mathbf{I}_V,\ \mathbf{I}_{VW} = \mathbf{I}_V - \mathbf{I}_W,\ \mathbf{I}_{WU} = \mathbf{I}_W - \mathbf{I}_U, \tag{4.1-17}$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme vztah mezi sdruženými proudy

$$\mathbf{I}_{UV} + \mathbf{I}_{VW} + \mathbf{I}_{WU} = 0 \tag{4.1-18}$$

Proudy ve vodičích trojfázového vedení tvoří tedy vyváženou trojfázovou soustavu (jejich topografický diagram je trojúhelník).

Je-li trojfázový vyvážený zdroj souměrně zatížen, je soustava fázových proudů $\mathbf{I}_U$, $\mathbf{I}_V$, $\mathbf{I}_W$ souměrná a tedy také soustava sdružených proudů $\mathbf{I}_{UV}$, $\mathbf{I}_{VW}$, $\mathbf{I}_{WU}$ je souměrná. Mezi modulem sdruženého a modulem fázového proudu pak platí vztah

$$Is = \sqrt{3} I_f\,. \tag{4.1-19}$$

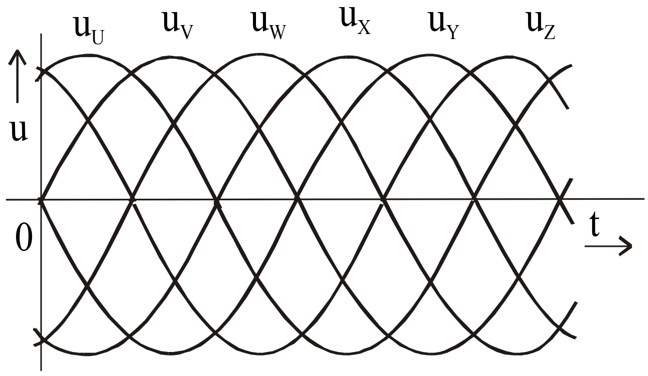
(Odvození je obdobné jako pro napětí při spojení do hvězdy.)

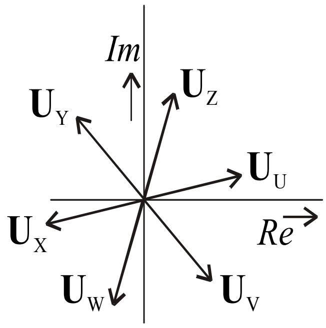
4.1.4 Šestifázová soustava

Šestifázové, popř. dvanáctifázové soustavy se používají zejména pro napájení usměrňovačů. Velkým počtem fází dosahujeme toho, že napětí má po usměrnění jen malé zvlnění a blíží se tedy konstantnímu stejnosměrnému průběhu. Praktický význam má jen souměrná soustava. Časový průběh souměrného šestifázového napětí je:

$$u_1(t) = \sqrt{2} U_f \sin(\omega t + \varphi),$$
$$u_2(t) = \sqrt{2} U_f \sin(\omega t + \varphi - 60^o),$$
$$\dots$$
$$u_6(t) = \sqrt{2} U_f \sin(\omega t + \varphi - 300^o).$$

Jeho časový průběh a fázorový diagram jsou na obr.4.1-9. Šest napěťových zdrojů, jejichž napětí tvoří šestifázovou souměrnou soustavu, lze spojit do hvězdy (prostá šestifázová hvězda, označení *YY*), do šestiúhelníka a do dvojitého trojúhelníka (označení *DD*).





Obrázek 4.1.9 Šestifázová souměrná soustava napětí a její fázorový diagram

4.1.5 Dvojfázové soustavy

Dvojfázové soustavy se používají ojediněle např. v telemechanice a v elektrických strojích (při rozběhu jednofázového indukčního stroje je potřeba pomocné fáze, statorové vinutí je pak dvojfázové).

4.1.6 Shrnutí podkapitoly 4.1

Nejčastěji jsou v praxi používané trojfázové soustavy. Pro popis jednotlivých veličin (napětí, proud) trojfázové soustavy používáme (podobně jako u jednofázových soustav) trojici fázorů napětí nebo proudů. Zjednodušení popisu a analýzy obvodů dosáhneme využitím popisu soustavy pomocí **operátoru natočení**. Podle způsobu zapojení trojfázových zdrojů rozeznáváme zapojení do **hvězdy** a do **trojúhelníka**. Je – li vyveden neutrální (nulový) vodič, můžeme u této soustavy odebírat napětí ***fázová*** (mezi fází a neutrálním bodem - např. 230 V) a napětí ***sdružená*** (mezi fázemi navzájem - např. 400 V). U souměrné trojfázové soustavy jsou fázory (napětí i proudů) navzájem posunuté o úhel 120°. Fázory sdružených napětí (proudů) mají moduly $\sqrt{3}$ krát větší než moduly fázorů fázových napětí (proudů) a jsou oproti nim o 30° posunuté.

4.1.7 Kontrolní otázky k podkapitole 4.1

1. Jak je definován operátor natočení ?
2. Jak vyjádříme popis trojfázové soustavy pomocí operátoru natočení ?
3. Odvoďte vztah mezi fázorem sdruženého napětí a fázového napětí.
3. Nakreslete nejčastěji používané zapojení zdrojů trojfázové soustavy .

Příklad 4.1-1:

Dokažte, že pro operátor natočení a platí : $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}+1=0$.

4.2 Výkon trojfázové soustavy v harmonickém ustáleném stavu

K trojfázovému souměrnému zdroji je připojen trojfázový spotřebič složený ze tří dvojpólů (čili fází spotřebiče) o impedancích $\mathbf{Z}_U$, $\mathbf{Z}_V$, $\mathbf{Z}_W$. Jestliže platí $\mathbf{Z}_U = \mathbf{Z}_V = \mathbf{Z}_W$, je spotřebič souměrný, není-li splněna tato podmínka, je nesouměrný. Trojici fází spotřebiče spojujeme buďto do **hvězdy** nebo do **trojúhelníka**. Jsou-li v obvodu vesměs souměrné trojfázové zdroje a souměrné trojfázové spotřebiče, nazýváme jej souměrným trojfázovým obvodem, v opačném případě jde o nesouměrný trojfázový obvod. Řešení souměrných trojfázových obvodů je snadné a v zásadě se neliší od řešení obvodů jednofázových.

4.2.1 Spojení spotřebiče do hvězdy (obr.4.2-1)

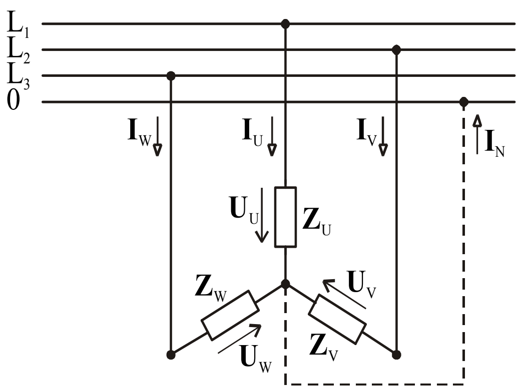
a) Nesouměrný trojfázový obvod

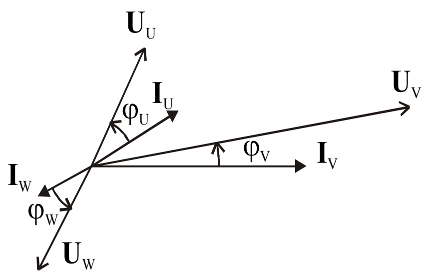
Celkový výkon odebíraný spotřebičem je roven součtu výkonů jeho tří fází. Komplexní výkon je

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}_U \mathbf{I}^*{}_U + \mathbf{U}_V \mathbf{I}^*{}_V + \mathbf{U}_W \mathbf{I}^*{}_W \qquad (4.2\text{-}1)$$

(obr.4.2-2), odkud činný výkon je

$$P = \mathrm{Re}[\mathbf{S}] = U_U I_U \cos\varphi_U + U_V I_V \cos\varphi_V + U_W I_W \cos\varphi_W = P_U + P_V + P_W \qquad (4.2\text{-}2)$$





Obrázek 4.2.1 Trojfázový spotřebič spojený do hvězdy

Obrázek 4.2.2 Fázorový diagram nesouměrné trojfázové soustavy

Jalový výkon je

$$Q = \mathrm{Im}[S] = U_U I_U \sin\varphi_U + U_V I_V \sin\varphi_V + U_W I_W \sin\varphi_W = Q_U + Q_V + Q_W \qquad (4.2\text{-}3)$$

a zdánlivý výkon

$$\mathrm{S} = |\mathbf{S}| \,. \qquad (4.2\text{-}4)$$

Mezi výkony *P, Q a S* zřejmě platí týž vztah jako u jednofázových obvodů

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \ . \qquad (4.2\text{-}5)$$

b) Souměrný trojfázový obvod

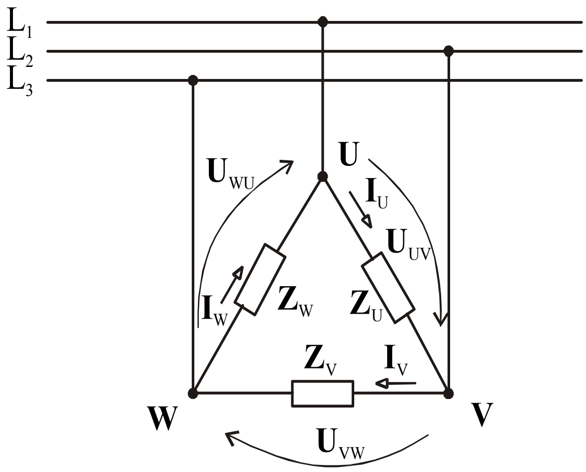
Proudy $\mathbf{I}_U$, $\mathbf{I}_V$, $\mathbf{I}_W$ mají stejnou velikost a proti napětím $\mathbf{U}_U$, $\mathbf{U}_V$, $\mathbf{U}_W$ mají stejný fázový posun φ. Jelikož napětí $\mathbf{U}_U$, $\mathbf{U}_V$, $\mathbf{U}_W$ tvoří souměrnou trojfázovou soustavu, tvoří také proudy souměrnou trojfázovou soustavu. Označíme $U_U = U_V = U_W = U_f$ a $I_U = I_V = I_W = I_f$ a zavedeme sdružené napětí $U_s = \sqrt{3}U_f$ a sdružený proud $I_s = I_f$. Potom dostáváme:

$$P = 3U_f I_f \cos\varphi = \sqrt{3}U_S I_S \cos\varphi, \qquad (4.2\text{-}6)$$

$$Q = 3U_f I_f \sin\varphi = \sqrt{3}U_S I_S \sin\varphi, \qquad (4.2\text{-}7)$$

$$S = 3U_f I_f = \sqrt{3}U_S I_S \ . \qquad (4.2\text{-}8)$$

4.2.2 Spojení spotřebiče do trojúhelníka (obr.4.2-3)



Obrázek 4.2.3 Trojfázový spotřebič spojený do trojúhelníka

a) Nesouměrný trojfázový obvod

Komplexní výkon odebíraný spotřebičem je

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_U + \mathbf{S}_V + \mathbf{S}_W = \mathbf{U}_{UV}\mathbf{I}^*{}_U + \mathbf{U}_{VW}\mathbf{I}^*{}_V + \mathbf{U}_{WU}\mathbf{I}^*{}_W \qquad (4.2\text{-}9)$$

odkud činný, jalový a zdánlivý výkon

$$P = \mathrm{Re}[S] = P_U + P_V + P_W,$$
$$Q = \mathrm{Im}[S] = Q_U + Q_V + Q_W, \qquad (4.2\text{-}10)$$
$$S = |S| \ .$$

Mezi veličinami P, Q a S platí opět vztah (4.2-5)

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \ .$$

b) Souměrný trojfázový obvod

Jelikož napětí $\mathbf{U}_{UV}$, $\mathbf{U}_{VW}$, $\mathbf{U}_{WU}$ tvoří trojfázovou souměrnou soustavu, tvoří také proudy $\mathbf{I}_U$, $\mathbf{I}_V$, $\mathbf{I}_W$ souměrnou soustavu, která je proti soustavě napětí posunuta o úhel φ. Označíme-li $U_U = U_V = U_W = U_f$ a $I_U = I_V = I_W = I_f$, a zavedeme-li sdružené napětí U_S=U_f a sdružený proud $I_S = \sqrt{3} I_f$, dostaneme pro *P, Q , S* opět vztahy (4.2-6) až (4.2-8).

4.2.3 Okamžitý výkon trojfázového spotřebiče

Okamžitý výkon *p(t)* odebíraný spotřebičem (v jakémkoliv spojení) je roven součtu okamžitých výkonů jeho tří fází:

$$p(t) = p_U(t) + p_V(t) + p_W(t) \ ,$$

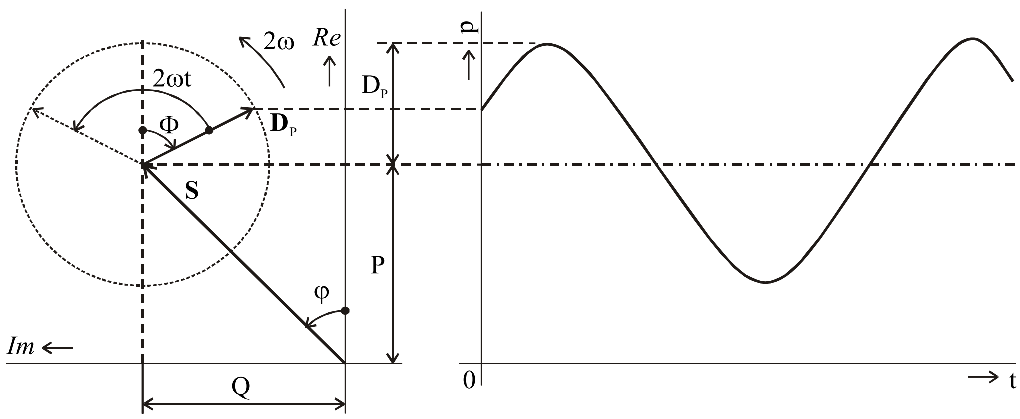
čili

$$p = u_U i_U + u_V i_V + u_W i_W \ , \qquad (4.2\text{-}11)$$

kde u_k, i_k jsou okamžité hodnoty napětí a proudu *k*-té fáze spotřebiče, *k=U, V, W*. Dosadíme-li za tyto hodnoty příslušné harmonické funkce, můžeme časový průběh okamžitého výkonu nesouměrné trojfázové soustavy vyjádřit ve tvaru

$$p(t) = \mathrm{Re}[S + D_p e^{j2\omega t}] = P + D_p \cos(2\omega t - \Phi)\,, \qquad (4.2\text{-}12)$$

kde *S* je komplexní výkon, *P* je činný výkon a $D_p = D_p e^{j\Phi}$ je tzv. *komplexní pulsační výkon*,



Obrázek 4.2.4 Časový průběh okamžitého výkonu *p(t)* trojfázové soustavy a vyjádření tohoto průběhu v Gaussově rovině

D_p je amplituda pulsačního výkonu. Pulsační výkon nemá vliv na hodnotu činného trojfázového výkonu *P* (neboť střední hodnota pulsačního výkonu je nulová). Na obr.4.2-4 je průběh *p = p(t)* spolu s jeho grafickým vyjádřením v komplexní rovině, kde fázor D_p se otáčí kolem koncového bodu fázoru *S* konstantní úhlovou rychlostí *2ω*.

U souměrných trojfázových obvodů je okamžitý výkon odebíraný spotřebičem konstantní, je roven činnému výkonu

$$p(t) = P = 3UI.$$

Je-li spotřebičem trojfázový indukční motor, bude ze souměrné trojfázové soustavy odebírat konstantní výkon *p(t) = P = konst* a bude dodávat konstantní točivý moment. Je-li trojfázový obvod nesouměrný, má přenášený výkon kmitavou složku. Při výrobě, přenosu, přeměně (transformaci) i spotřebě elektrické energie v nesouměrném trojfázovém obvodu se tak setkáváme s nežádoucími jevy (např. se zvětšením ztrát), jejichž teoretické řešení bývá náročné.

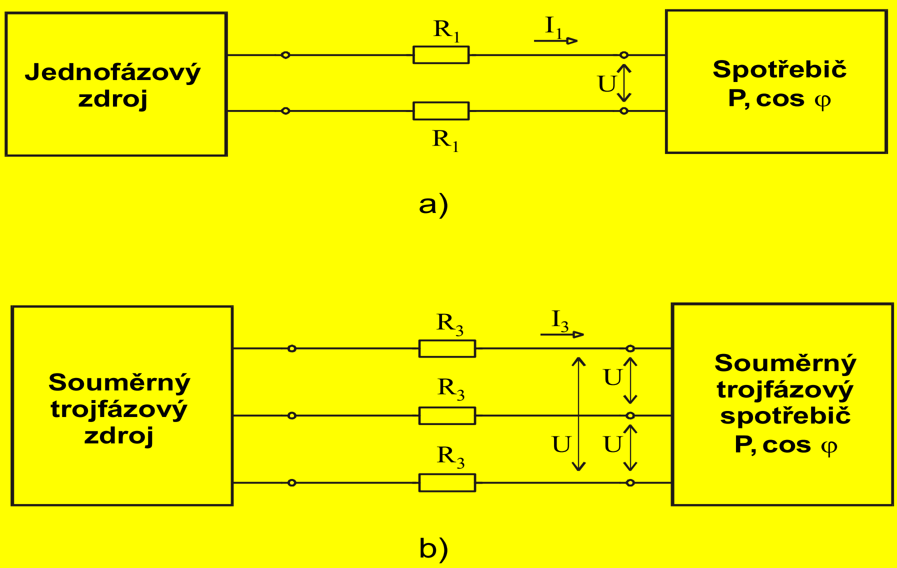
Činný výkon se přenáší trojfázovým vedením s minimálními ztrátami (Jouleovými), je-li soustava napěťově i proudově souměrná a je-li účiník $\cos\varphi = 1$.

Příklad 4.2-1:

Činný výkon P při účiníku $\cos\varphi$ a při napětí (na svorkách spotřebiče) U se přenáší jednak jednofázovou soustavou, jednak souměrnou trojfázovou soustavou (obr.4.2-5).

a) Porovnejte ztráty při přenosu, mají-li jednotlivé vodiče mezi zdrojem a spotřebičem stejný odpor ($R_1 = R_3$).

b) Určete, u které z obou soustav je menší spotřeba materiálu na vedení, požadujeme-li, aby ztráty při přenosu elektrické energie byly u obou soustav stejné.



Obrázek 4.2.5 K ekonomice přenosu elektrické energie jednofázovou a trojfázovou soustavou

Jednofázová soustava: $I_1 = \dfrac{P}{U\cos\varphi}$, ztráty ve vedení: $\Delta P_1 = 2R_1 I_1^{\,2} = \dfrac{2R_1 P^2}{U^2\cos^2\varphi}$.

Trojfázová soustava: $I_3 = \dfrac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi}$, ztráty ve vedení: $\Delta P_3 = 3R_3 I_3^{\,2} = \dfrac{3R_3 P^2}{3U^2\cos^2\varphi}$.

a) Porovnáním výsledků (pro $R_1 = R_3$): $\Delta P_1 = 2\Delta P_3$ je vidět, že **ztráty při trojfázovém přenosu jsou poloviční** než ztráty při jednofázovém přenosu.

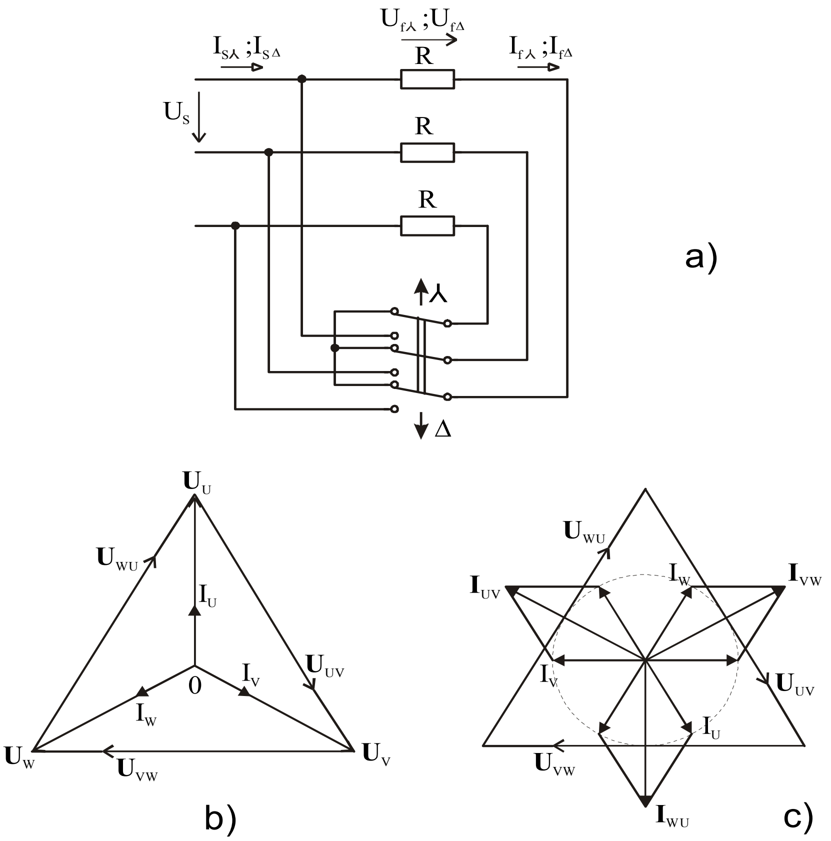
b) Požadujeme-li, aby ztráty byly stejné ($\Delta P_1 = \Delta P_3$), je $R_3 = 2R_1$; odpor každého ze tří vodičů trojfázové soustavy je dvojnásobný než odpor každého ze dvou vodičů jednofázové soustavy. Jelikož odpor vodiče je nepřímo úměrný průřezu vodičů, je $V_3 = V_1/2$ (V_3 je objem jednoho vodiče trojfázové soustavy a V_1 je objem jednoho vodiče jednofázové soustavy). Protože trojfázová soustava je trojvodičová, kdežto jednofázová je dvouvodičová, je poměr objemů vodičů obou vedení – a tedy poměr hmotností materiálů vodičů $G_3/G_1 = 3/4$. **U trojfázové**

souměrné soustavy je tedy třeba pro zhotovení vedení pouze 75 % materiálu potřebného pro jednofázovou soustavu (při stejných ztrátách).

K obdobné úspoře hmotnosti, ceny a rozměrů dochází u trojfázových alternátorů a motorů, přičemž jejich provozní vlastnosti jsou výhodnější než u strojů jednofázových.

Příklad 4.2-2:

Na trojfázové vedení napájené souměrným napěťovým zdrojem o sdruženém napětí U_s je připojen souměrný trojfázový spotřebič, jenž má v každé fázi odpor R. Spojení spotřebiče lze přepínat z hvězdy do do trojúhelníka a naopak (obr.4.2-6.a).



Obrázek 4.2.6 K příkladu 4.2-2 : a) přepínatelné spojení spotřebiče hvězda – trojúhelník, b) spojení do hvězdy, c) spojení do trojúhelníka

Jak se změní hodnota sdruženého proudu ve vedení, proudu ve fázích spotřebiče a činného výkonu spotřebiče při přepojení ze spojení do hvězdy na spojení do trojúhelníka?

Spojení do hvězdy:

Napětí a proudy ve fázích spotřebiče jsou (obr.4.2-6.b):

$$U_{fY} = U_s / \sqrt{3}\,, \quad I_{fY} = I_{sY}\,, \qquad \text{kde} \qquad I_{fY} = \frac{U_{fY}}{R} = \frac{U_s}{\sqrt{3}R}\;.$$

Činný výkon spotřebiče je

$$P_Y = 3\frac{U_{fY}^{\ 2}}{R} = \frac{U_s^{\ 2}}{R} \ .$$

Spojení do trojúhelníka:

Proudy ve fázích spotřebiče jsou $I_{fD} = U_s/R$, sdružené proudy ve vedení jsou $I_{sD} = \sqrt{3} I_{fD}$ (obr.4.2-6.c). Činný výkon spotřebiče je

$$P_D = 3\frac{U_s^{\ 2}}{R} \ .$$

Poměr sdružených proudů, fázových proudů a činných výkonů je

$$\frac{I_{sD}}{I_{sY}} = 3, \qquad \frac{I_{fD}}{I_{fY}} = \sqrt{3}, \qquad \frac{P_D}{P_Y} = 3.$$

Po přepojení z hvězdy do trojúhelníka se tedy sdružené proudy ve vedení a činné výkony zvětší třikrát a proudy ve fázích spotřebiče $\sqrt{3}$ -krát.

Jeden ze způsobů spouštění trojfázového indukčního motoru spočívá v přepnutí vinutí motoru spojeného do hvězdy na spojení do trojúhelníka. Aby se omezil velký záběrný proud, připojuje se motor na síť s vinutím spojeným do hvězdy a po rozběhu se jeho vinutí spojí do trojúhelníka. Záběrný proud v síti (ale také záběrný moment motoru) je ve spojení do hvězdy pouze *1/3* hodnoty ve spojení do trojúhelníka.

Poznámka:

Doposud jsme se zabývali výkony v trojfázových obvodech, jež jsou v harmonickém ustáleném stavu. V obvodech se železem, diodami a zejména s tyristory, jsou napětí a proudy sice periodické, ale neharmonické. Je-li odběr elektrické energie z trojfázové sítě nesouměrný, pak kromě pulsačního výkonu, příp. skrytých výkonů, nutno ještě počítat s tzv. deformačním výkonem.

4.2.4 Shrnutí podkapitoly 4.2

Okamžitý výkon odebíraný spotřebičem v trojfázové síti (v jakémkoliv zapojení) je roven součtu okamžitých výkonů jednotlivých fází $p(t) = p_U(t) + p_V(t) + p_W(t)$. Komplexní výkon trojfázového spotřebiče (v jakémkoliv zapojení) je dán součtem výkonů v jednotlivých fázích:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_U + \mathbf{S}_V + \mathbf{S}_W = \mathbf{U}_U.\mathbf{I}_U^* + \mathbf{U}_V.\mathbf{I}_V^* + \mathbf{U}_W.\mathbf{I}_W^* \ .$$

Výkon činný P je reálnou částí, výkon jalový Q imaginární částí a zdánlivý modulem /**S**/ komplexního výkonu **S**. V souměrné síti (souměrný zdroj a souměrná zátěž) je komplexní výkon zátěže možno určit (u obou zapojení) jako $\mathbf{S} = 3.\mathbf{U}_U.\mathbf{I}_U^* = 3\frac{U_Z^2}{\mathbf{Z}^*}$, okamžitý výkon je v tomto případě konstantní a je roven činnému výkonu zátěže $p(t) = P = 3.U_z.I_z$.

Při zapojení spotřebiče do hvězdy jsou na jednotlivých zátěžích napětí fázová, při zapojení do trojúhelníka sdružená ($U_s = \sqrt{3} U_f$) . Při shodných zátěžích je proto výkon trojfázového spotřebiče zapojeného do trojúhelníka 3 krát větší než při zapojení do hvězdy.

4.2.5 Kontrolní otázky a příklady ke kap.4.2

1. Jak určíte komplexní, činný, jalový a zdánlivý výkon trojfázového spotřebiče ?
2. Jaký je poměr ztrát mezi jednofázovou (dvouvodičovou) soustavou a trojfázovou soustavou při shodných ztrátách vedení ?
3. Proč v praxi používáme přepnutí zátěže ze zapojení hvězda na trojúhelník ?

Příklad 4.2-3:

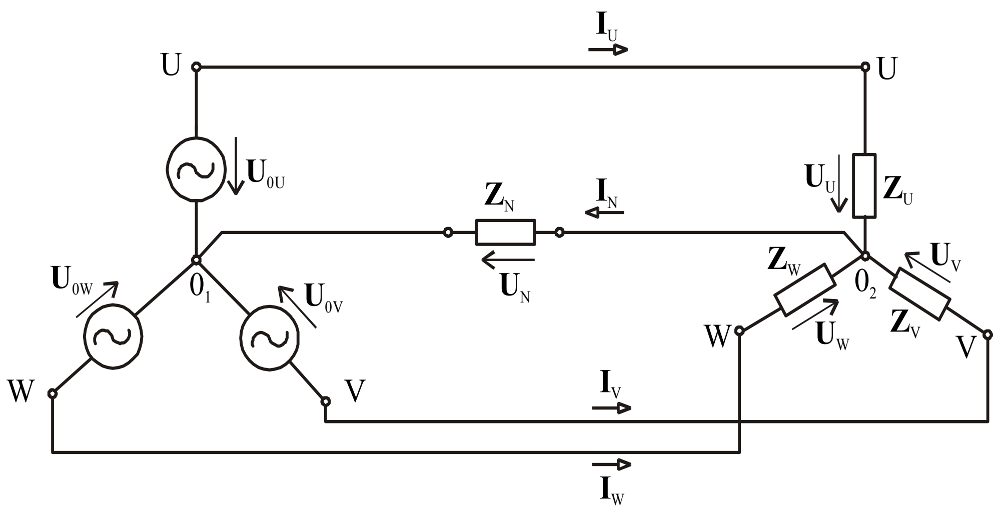
Spotřebič je zapojen do hvězdy ,impedance $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3$ =(10 + j 25)Ω. Je napájen souměrným zdrojem o sdružených napětích U_S = 380 V. ($\mathbf{U}_{UV}$= 380 e^{j0}, $\mathbf{U}_{VW}$ = 380 $e^{-j120°}$, $\mathbf{U}_{WU}$ = 380 $e^{j120°}$). Vypočtěte proudy impedancemi, celkový komplexní, činný, jalový a zdánlivý výkon spotřebiče.

4.3 Analýza jednodušších trojfázových obvodů

Analýzu trojfázových obvodů lze provádět kteroukoliv z obecných metod analýzy. Dále uvedeme řešení několika typických trojfázových obvodů.

Příklad 4.3.1:

Proveďte analýzu obvodu tvořeného trojfázovým nesouměrným zdrojem napětí $\mathbf{U}_{0U}$, $\mathbf{U}_{0V}$, $\mathbf{U}_{0W}$ spojeným do hvězdy, čtyřvodičovým vedením a trojfázovým nesouměrným



Obrázek 4.3.1 Nesouměrný zdroj - vedení - nesouměrný spotřebič

spotřebičem $\mathbf{Z}_U \neq \mathbf{Z}_V \neq \mathbf{Z}_W$ spojeným též do hvězdy (obr.4.3-1). Komplexní impedance fázových vodičů vedení jsou zahrnuty do komplexních impedancí fází spotřebiče.

Řešíme metodou uzlových napětí. Uzel 0_1 zvolíme za referenční, pak uzel 0_2 je nezávislý a $\mathbf{U_N}$ je uzlové napětí. Po přepočtu napěťových zdrojů na proudové snadno aplikací prvního Kirchhoffova zákona na uzel 0_2 dostaneme:

$$-\frac{\mathbf{U_{0U}}-\mathbf{U_N}}{\mathbf{Z_U}}-\frac{\mathbf{U_{0V}}-\mathbf{U_N}}{\mathbf{Z_V}}-\frac{\mathbf{U_{0W}}-\mathbf{U_N}}{\mathbf{Z_W}}+\frac{\mathbf{U_N}}{\mathbf{Z_N}}=0\ .$$

Pro zjednodušení zavedeme admitance a vypočítáme:

$$\mathbf{U_N}=\frac{\mathbf{U_{0U}}\mathbf{Y_U}+\mathbf{U_{0V}}\mathbf{Y_V}+\mathbf{U_{0W}}\mathbf{Y_W}}{\mathbf{Y_U}+\mathbf{Y_V}+\mathbf{Y_W}+\mathbf{Y_N}}\,. \tag{4.3-1}$$

Z druhého Kirchhoffova zákona plynou rovnice

$$\mathbf{U_U}=\mathbf{U_{0U}}-\mathbf{U_N}\,,\ \ \mathbf{U_V}=\mathbf{U_{0V}}-\mathbf{U_N}\,,\ \ \mathbf{U_W}=\mathbf{U_{0W}}-\mathbf{U_N}\ , \tag{4.3-2}$$

z prvního Kirchhoffova zákona potom dostáváme

$$\boldsymbol{I_U}+\boldsymbol{I_V}+\boldsymbol{I_W}-\boldsymbol{I_N}=0 \tag{4.3-3}$$

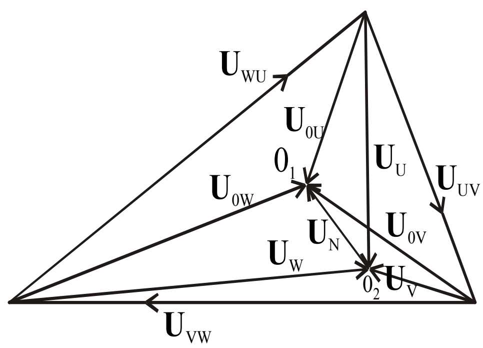
a ze zobecněného Ohmova zákona vyplývá

$$\boldsymbol{U_U}=\boldsymbol{Z_U}\boldsymbol{I_U}\,,\ \ \boldsymbol{U_V}=\boldsymbol{Z_V}\boldsymbol{I_V}\,,\ \ \boldsymbol{U_W}=\boldsymbol{Z_W}\boldsymbol{I_W}\,,\ \ \boldsymbol{U_N}=\boldsymbol{Z_N}\boldsymbol{I_N}\,. \tag{4.3-4}$$

Z rovnic (4.3-4) pomocí vypočtených napětí $\mathbf{U}_U$, $\mathbf{U}_V$ a $\mathbf{U}_W$ získaných z rovnic (4.3-2) vypočítáme proudy $\mathbf{I}_U$, $\mathbf{I}_v$ a $\mathbf{I}_W$

$$\boldsymbol{I_U}=(\boldsymbol{U_{0U}}-\boldsymbol{U_N})\,\boldsymbol{Y_U},\ \ \boldsymbol{I_V}=(\boldsymbol{U_{0V}}-\boldsymbol{U_N})\,\boldsymbol{Y_V},\ \ \boldsymbol{I_W}=(\boldsymbol{U_{0W}}-\boldsymbol{U_N})\,\boldsymbol{Y_W},\ \ \boldsymbol{I_N}=\boldsymbol{U_N}\,\boldsymbol{Y_N}\,.$$

Topografický diagram napětí je na obr.4.3-2. Je zřejmé, že i při souměrném zdroji $\mathbf{U}_{0U},\mathbf{U}_{0V},\mathbf{U}_{0W}$ bude na svorkách nesouměrného spotřebiče nesouměrná soustava napětí $\mathbf{U}_U,\mathbf{U}_V,\mathbf{U}_W$. To je ovšem pro správnou činnost spotřebiče nežádoucí, neboť jeho fáze dostávají buďto vyšší nebo nižší napětí, než na které byl navržen. Napětí spotřebiče by bylo souměrné, kdyby $\boldsymbol{U_N}=0$. Z rovnice (4.3-1) plyne, že toho lze (teoreticky) dosáhnout dokonalým středním (nulovacím) vodičem ($\boldsymbol{Y_N}\to\infty$). Naproti tomu při nevyvedení nebo přerušení středního vodiče ($\boldsymbol{Y_N}\to 0$) je nesouměrnost napětí spotřebiče relativně největší. Proto se při nesouměrném zatížení vždy vyžaduje střední vodič a dimenzuje se podle ekonomických hledisek.



Obrázek 4.3.2 Topografický diagram obvodu

Poznámka:

Důležitý je případ, kdy obvod je souměrný, zdroj je souměrný : U_{0U}, $\boldsymbol{U_{0V}}=\boldsymbol{a^2}\,\boldsymbol{U_{0U}}$, $\boldsymbol{U_{0W}}=\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{U_{0U}}$, a také spotřebič je souměrný: $\boldsymbol{Z_U}=\boldsymbol{Z_V}=\boldsymbol{Z_W}$. Podle rovnice (4.3-1) je $\boldsymbol{U_N}=0$ a tedy i $\boldsymbol{I_N}=0$. Souměrný obvod tedy nevyžaduje střední vodič, neboť jím neprochází proud.

Napětí na fázích spotřebiče jsou $\boldsymbol{U_U} = \boldsymbol{U_{0U}}$, $\boldsymbol{U_V} = \boldsymbol{U_{0V}}$, $\boldsymbol{U_W} = \boldsymbol{U_{0W}}$, tvoří tedy souměrnou soustavu. Rovněž proudy ve fázích spotřebiče

$$\mathbf{I}_U = \mathbf{U}_U / \mathbf{Z}_U,\quad \mathbf{I}_V = \mathbf{U}_V / \mathbf{Z}_V,\quad \mathbf{I}_W = \mathbf{U}_W / \mathbf{Z}_W \tag{4.3-5}$$

tvoří souměrnou soustavu. Z uvedeného je zřejmé, že řešení souměrného obvodu je snadné a v zásadě se neliší od řešení obvodu jednofázového.

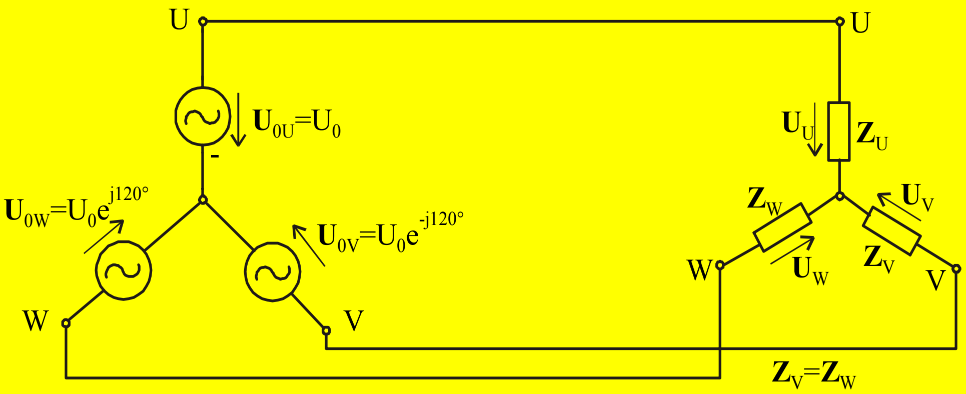
Nejsou-li komplexní impedance vedení zanedbatelné, připočítáme komplexní impedance vedení ke komplexním impedancím fází (spotřebič zapojený do hvězdy je třeba transfigurovat na spotřebič spojený do trojúhelníka). Je-li obvod vyvážený, tvoří napětí a proudy spotřebiče souměrné trojfázové soustavy a řešení je opět velmi snadné.

Příklad 4.3-2:

V trojfázovém obvodu z obr.4.3-3 stanovte napětí na fázích spotřebiče a sestrojte fázorový diagram, jestliže

a) $Z_U = 0$ (na fázi U spotřebiče vznikl zkrat),

b) přívod fáze U ke spotřebiči je přerušen.



Obrázek 4.3.3 K příkladu 4.3-2 na analýzu trojfázového obvodu

Řešení: Ada) Z rovnice (4.3-1) pro $Y_U \to \infty$ plyne $U_N = U_{0U}$. Pak (viz obr.4.3-4a) platí :

$$\mathbf{U}_U = \mathbf{U}_{0U} - \mathbf{U}_N = 0,$$
$$\mathbf{U}_V = \mathbf{U}_{0V} - \mathbf{U}_N = \mathbf{a}^2\mathbf{U}_{0U} - \mathbf{U}_{0U} = \sqrt{3}\,\mathbf{U}_{0U}\,e^{j210°},$$
$$\mathbf{U}_W = \mathbf{U}_{0W} - \mathbf{U}_N = \mathbf{a}\mathbf{U}_{0U} - \mathbf{U}_{0U} = \sqrt{3}\,\mathbf{U}_{0U}\,e^{j150°}.$$

Na fázi U spotřebiče je napětí nulové, kdežto na fázích V a W vznikne přepětí.

Adb) Použitím vztahů $\mathbf{U}_{0U} + \mathbf{U}_{0V} + \mathbf{U}_{0W} = 0$, $\mathbf{Y}_U = 0$, $\mathbf{Y}_V = \mathbf{Y}_W$ dostáváme z rovnice (4.3-1) napětí

$$\mathbf{U}_N = 0{,}5(\mathbf{U}_{0V} + \mathbf{U}_{0W}) = -0{,}5\mathbf{U}_{0U} \qquad \text{(viz obr.4.3-4b)},$$

tedy

$$\mathbf{U}_U = 0,$$
$$\mathbf{U}_V = \mathbf{U}_{0V} - \mathbf{U}_N = a^2\mathbf{U}_{0U} + \frac{1}{2}\mathbf{U}_{0U} = -j\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{U}_{0U},$$
$$\mathbf{U}_W = \mathbf{U}_{0W} - \mathbf{U}_N = a\mathbf{U}_{0U} + \frac{1}{2}\mathbf{U}_{0U} = +j\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{U}_{0U}.$$

Na fázi U spotřebiče je napětí nulové a na fázích V a W napětí poklesne.

4.3.1 Shrnutí podkapitoly 4.3

Analýza trojfázových obvodů pomocí symbolické metody se neliší od analýzy jednofázových obvodů. Při řešení (prostřednictvím fázorů napětí a proudů jednotlivých větví) můžeme použít všechny známé metody řešení, nejčastěji využíváme některou z efektivních univerzálních metod (metoda uzlových napětí, metoda smyčkových proudů). Řešení se dále zjednodušuje u souměrných obvodů, ve kterých jsou napětí a proudy symetrické a při zapojení spotřebiče do hvězdy neprotéká nulovým vodičem proud.

Trojfázové obvody navrhujeme tak, aby jejich proudové a napěťové soustavy byly souměrné. Nesouměrnostmi vznikají vždy nežádoucí jevy: spotřebiče jsou nedokonale využity a může dojít k jejich poškození (vlivem napěťového nebo proudového přetížení některých jejich fází) a navíc se tím v sítích zvětšují ztráty. Značné nesouměrnosti vznikají zejména při havarijních stavech (zkraty, přerušení vodičů); jejich nežádoucím účinkům čelíme tak, že obvod (nebo alespoň jeho postiženou část) vyřadíme z provozu. Nesouměrnost způsobují též jednofázové spotřebiče. Menší spotřebiče (např. osvětlení, domácí spotřebiče) se připojují na trojfázovou síť podle pravděpodobnosti jejich činnosti tak, aby zatěžovaly síť co možná souměrně. Obtížnější je řešení u jednofázových spotřebičů velkých výkonů (např. elektrická trakce, indukční nebo odporové pece, jejichž příkon je až několik set kilowatů).

4.3.2 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 4.3

1. Jaký proud protéká středním vodičem trojfázové (čtyřvodičové) soustavy v případě symetrického obvodu ?
2. Jaký proud protéká středním vodičem trojfázové (čtyřvodičové) soustavy v případě nesymetrického obvodu ?

Příklad 4.3-3:

Analyzujte obvod tvořený trojfázovým zdrojem napětí o sdružených napětích U_{UV}, U_{VW}, U_{WU}, trojvodičovým vedením a trojfázovým spotřebičem spojeným a) do hvězdy, b) do trojúhelníka .

4.4 Metoda souměrných složek

Na několika jednodušších trojfázových obvodech jsme ukázali, že se jejich analýza výrazně zjednoduší, jsou-li souměrné. I když nesouměrné trojfázové obvody jsou z hlediska kvality a hospodárnosti přenosu elektrické energie nevýhodné, nemůžeme je zcela vyloučit při normální činnosti a zejména při havarijních stavech, jež zpravidla představují značné nesouměrnosti. Tyto obvody lze řešit metodou souměrných složek, jejíž podstatou je transformace nesouměrné trojfázové soustavy (napětí a proudů) na tři trojfázové soustavy složkové. Pomocí těchto složkových soustav provedeme analýzu obvodu a z nalezených výsledků přejdeme zpět k nesouměrným soustavám vyjadřujícím hledané řešení.

4.4.1 Nesouměrná trojfázová soustava a její souměrné složky

Základem metody souměrných složek je tento poznatek: Každou trojfázovou
Základem metody souměrných složek je tento poznatek: Každou trojfázovou nesouměrnou soustavu reprezentovanou fázory $\boldsymbol{U_U}$, $\boldsymbol{U_V}$, $\boldsymbol{U_W}$ lze jednoznačně rozložit na tři trojfázové soustavy:

- na soustavu **souslednou** (synchronní) :

$$\boldsymbol{U_{aU} = U_a ,\ U_{aV} = a^2\, U_a ,\ \ U_{aW} = aU_a ,} \tag{4.4-1}$$

- na soustavu **zpětnou** (inverzní)

$$\boldsymbol{U_{bU} = U_b ,\ \ U_{bV} = a\ U_b ,\ \ U_{bW} = a^2\, U_b ,} \tag{4.4-2}$$

- na soustavu **nulovou** (netočivou)

$$\boldsymbol{U_{0U} = U_{0V} = U_{0W} = U_0} \,. \tag{4.4-3}$$

Tuto trojici trojfázových soustav nazýváme **soustavou souměrných složek**.

Platí též opačné tvrzení: Mějme soustavu souměrných složek. Součtem fázorů odpovídajících si fází je jednoznačně definována trojfázová soustava, jež je v obecném případě nesouměrná. Obě tvrzení jsou znázorněna na obr.4.4-1.

Jejich důkaz vyplyne z matematické formulace obou vět. Podle druhého z obou tvrzení je:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U_U} &= \boldsymbol{U_{aU} + U_{bU} + U_{0U}} , \\ \boldsymbol{U_V} &= \boldsymbol{U_{aV} + U_{bV} + U_{0V}} , \\ \boldsymbol{U_W} &= \boldsymbol{U_{aW} + U_{bW} + U_{0W}} . \end{aligned} \tag{4.4-4}$$

Pomocí rovnic (4.4-1) až (4.4-3) lze tuto soustavu zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U_U} &= \boldsymbol{U_a + U_b + U_0} , \\ \boldsymbol{U_V} &= \boldsymbol{a^2 U_a + a\, U_b + U_0} , \\ \boldsymbol{U_W} &= \boldsymbol{a\, U_a + a^2 U_b + U_0} \end{aligned} \tag{4.4-5}$$

anebo přehledněji maticově

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{S}}\, \underline{\mathbf{U}_S} , \tag{4.4-6}$$

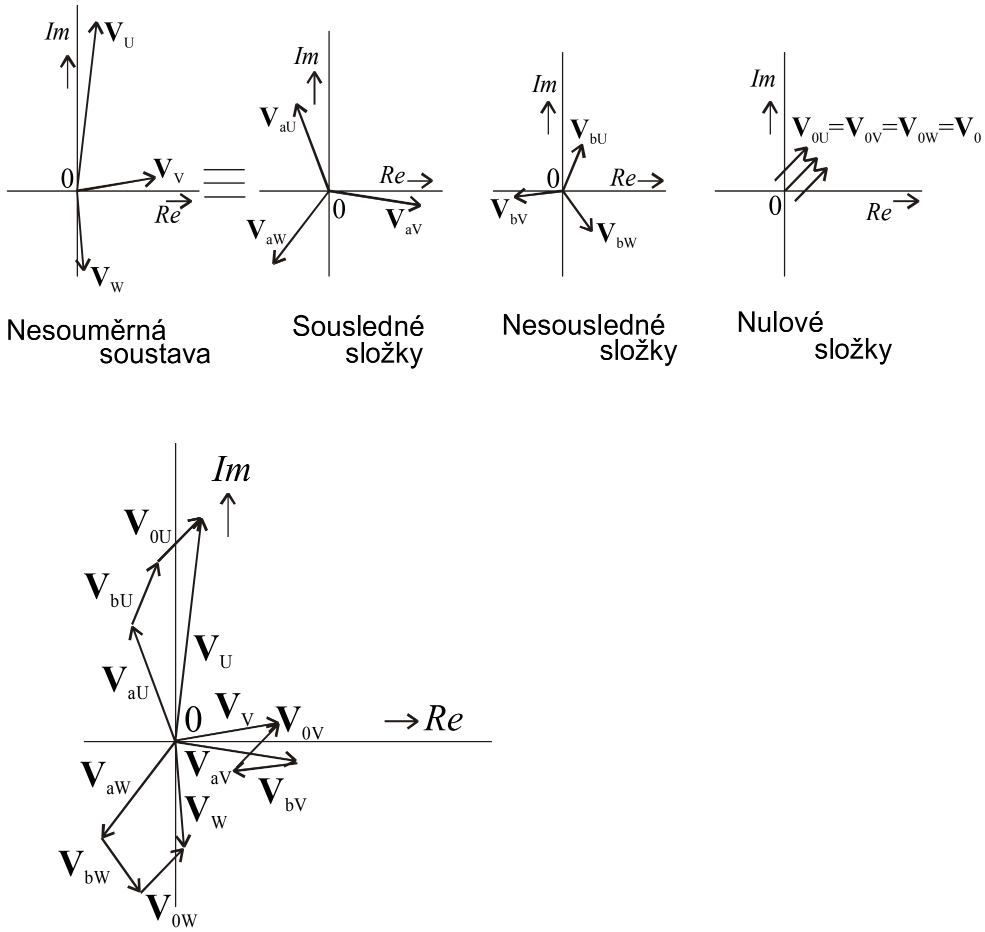
kde

$$\underline{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_U \\ \mathbf{U}_V \\ \mathbf{U}_W \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{U}}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{a}^2 & \mathbf{a} & 1 \\ \mathbf{a} & \mathbf{a}^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sloupcová matice $\underline{\mathbf{U}}$ je maticí fázorů nesymetrické trojfázové soustavy a sloupcová matice $\underline{\mathbf{U}}_S$ je maticí fázorů souměrných složek; matice $\underline{\mathbf{S}}$ je regulární a nazýváme ji **maticí souměrných složek.**

Řešením soustavy rovnic (4.4-5) dostáváme

$$\mathbf{U}_a = \frac{1}{3}(\mathbf{U}_U + \mathbf{U}_V + \mathbf{U}_W)\,,$$
$$\mathbf{U}_b = \frac{1}{3}(\mathbf{U}_U + \mathbf{a}^2\mathbf{U}_V + \mathbf{a}\mathbf{U}_W)\,, \tag{4.4-7}$$
$$\mathbf{U}_0 = \frac{1}{3}(\mathbf{U}_U + \mathbf{a}\mathbf{U}_V + \mathbf{a}^2\mathbf{U}_W)\,.$$



Obrázek 4.4.1 Trojfázová nesouměrná soustava a její souměrné složky

což lze přehledněji zapsat maticově:

$$\underline{\mathbf{U}}_S = \underline{\mathbf{S}}^{-1}\underline{\mathbf{U}}\,, \tag{4.4-8}$$

kde

$$\underline{\mathbf{S}}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{a} & \mathbf{a}^2 \\ 1 & \mathbf{a}^2 & \mathbf{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.4-9}$$

Podle rovnice (4.4-7) lze tedy rozložit nesouměrnou trojfázovou soustavu na soustavu souměrných složek. Naproti tomu pomocí rovnic (4.4-5) lze ze soustavy souměrných složek vyjádřit nesouměrnou trojfázovou soustavu. Trojfázová nesouměrná soustava i každá z jejích tří souměrných složek je v Gaussově rovině zobrazena fázory, jimž přísluší vektory, které se vesměs otáčejí v matematicky kladném smyslu úhlovou rychlostí ω kolem počátku. Sousledná složka má týž sled fází jako daná nesouměrná soustava a zpětná složka má opačný sled fází. Nulová složka je tvořena třemi stejnými fázory. Souměrné složky napětí a proudu lze fyzikálně interpretovat a jsou přímo měřitelné.

Rovnici (4.4-6) lze považovat za lineární transformaci sloupcové matice souměrných složek $\underline{\mathbf{U}}_S$ transformační maticí $\underline{\mathbf{S}}$ na matici nesouměrné trojfázové soustavy $\underline{\mathbf{U}}$. Rovnice (4.4-8) vyjadřuje transformaci inverzní.

Trojfázová soustava, jejíž nulová složka je rovna nule, $\boldsymbol{U_0} = 0$, je zřejmě vyvážená; při $\boldsymbol{U_0} \neq 0$ jde o soustavu nevyváženou.

Pro posouzení kvality přenosu elektrické energie slouží ***činitel nesouměrnosti***, jenž je definován jako poměr zpětné složky k sousledné složce

$$\rho = \frac{U_b}{U_a} \qquad \text{resp.} \quad \rho = 100\frac{U_b}{U_a} \ [\%] \tag{4.4-10}$$

a ***činitel nevyváženosti***, definovaný jako poměr nulové složky k sousledné složce

$$\eta = \frac{U_0}{U_a} \qquad \text{resp.} \qquad \eta = 100\frac{U_0}{U_a} \ [\%]\,. \tag{4.4-11}$$

U vyvážené soustavy je zřejmě $\eta = 0$. Při normálním chodu rozvodné soustavy požadujeme, aby hodnota těchto činitelů nepřekročila jednotky procent.

Závěrem uveďme, že transformaci trojfázové nesouměrné soustavy lze zobecnit na *m*-fázovou nesouměrnou soustavu. Soustava souměrných složek se pak skládá z *m* *m*-fázových veličin. Nazýváme je soustavou první (souslednou), soustavou druhou atd. až soustavou m-tou (nulovou). Přitom k-tá složková soustava (k = 1,..., m) se skládá z m harmonických průběhů o stejných amplitudách, přičemž fázový posun mezi každou dvojicí po sobě následujících veličin je

$$\alpha = \frac{2\pi}{m}k, \qquad k = 1, \ldots m\,. \tag{4.4-12}$$

4.4.2 Výkon nesouměrné trojfázové soustavy vyjádřený souměrnými složkami

Při řešení trojfázového obvodu metodou souměrných složek je mnohdy výhodné určit výkony přímo ze souměrných složek napětí a proudů. Uvažujeme nesouměrný spotřebič připojený na trojfázovou nesouměrnou síť. Napětí sítě $\mathbf{U}_U, \mathbf{U}_V, \mathbf{U}_W$ a proudy odebírané spotřebičem $\mathbf{I}_U, \mathbf{I}_V, \mathbf{I}_W$ tvoří tedy nesouměrné trojfázové soustavy, jejichž souměrné složky jsou $\mathbf{U}_a, \mathbf{U}_b, \mathbf{U}_0, \mathbf{I}_a, \mathbf{I}_b, \mathbf{I}_0$.

Platí věta:
Komplexní výkon odebíraný spotřebičem je

$$\mathbf{S} = 3(\mathbf{U}_a\mathbf{I}_a^* + \mathbf{U}_b\mathbf{I}_b^* + \mathbf{U}_0\mathbf{I}_0^*)\,. \tag{4.4-13}$$

Činný, jalový a zdánlivý výkon odebíraný spotřebičem je pak

$$P=\mathrm{Re}[\boldsymbol{S}],\ Q=\mathrm{Im}[\boldsymbol{S}],\ S=|\boldsymbol{S}|\ . \tag{4.4-14}$$

4.4.3 Analýza trojfázových obvodů metodou souměrných složek

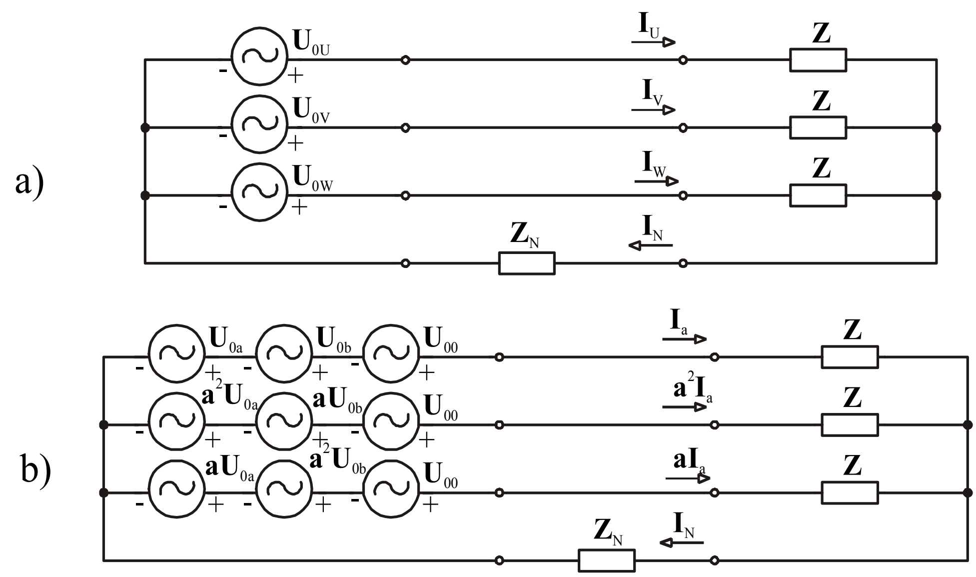
Metody souměrných složek se používá zejména při řešení havarijních stavů v energetických systémech (zkraty, přerušení vodičů). S jejími aplikacemi se tedy v širokém měřítku setkáváme v elektroenergetice, a proto zde upustíme od systematického výkladu a omezíme se na jednodušší ukázky.

Příklad 4.4-1

Nesouměrný trojfázový zdroj napětí zapojený do hvězdy napájí čtyřvodičovým vedením souměrný spotřebič zapojený též do hvězdy (obr.4.4-2.a). Určete proudy ve vedení.

Řešení:

1. Fázová napětí zdroje $\mathbf{U}_{0U}, \mathbf{U}_{0V}, \mathbf{U}_{0W}$ rozložíme na souměrné složky. Jejich působení lze interpretovat způsobem patrným z obr.4.4-2b.



Obrázek 4.4.2 Nesouměrný trojfázový zdroj - vedení - souměrný spotřebič

2. Použijeme principu superpozice:

- Nechť působí pouze zdroje sousledné složky $\mathbf{U}_{0a}, a^2\mathbf{U}_{0a}, a\mathbf{U}_{0a}$.Obvod se pak skládá ze souměrného zdroje a souměrného spotřebiče. Jeho řešení je snadné, proudy ve vedení tvoří souslednou soustavu proudů:

$$I_a = \frac{U_{0a}}{Z}, \; a^2 I_a, \; a \; I_a \; .$$

- Nechť působí pouze zdroje zpětné složky $\mathbf{U}_{0b}, a\mathbf{U}_{0b}, a^2\mathbf{U}_{0b}$.Opět jde o řešení trojfázového obvodu se souměrným zdrojem i spotřebičem. Proudy ve vedení tvoří zpětnou složku

$$I_b = \frac{U_{0b}}{Z}, \quad a^2 I_b, \; a \; I_b \; .$$

- Nechť působí pouze zdroje nulové složky $\boldsymbol{U_{00}}$. V obvodu působí tři stejné harmonické zdroje. Fázovými vodiči vedení procházejí tři stejné proudy $\boldsymbol{I_0}$ tvořící nulovou složku proudů. Nulovým vodičem tedy prochází proud $3\boldsymbol{I_0}$. Podle druhého Kirchhoffova zákona platí vztah

$$\boldsymbol{U_{00} = I_0 Z + 3 \, I_0 Z_N} \, ,$$

odkud je

$$I_0 = \frac{U_{00}}{I_0} \; , \qquad \text{kde } \boldsymbol{Z_0 = Z + 3 \, Z_N} \, .$$

Vyšetření složkových soustav proudů je tedy snadné a formálně se neliší od jednofázových obvodů.

3. Známe-li souměrné složky proudů ve fázových vodičích vedení, lze z rovnice (4.4-5) určit hledané proudy v těchto vodičích:

$$\boldsymbol{I_U = I_a + I_b + I_0} \, ,$$
$$\boldsymbol{I_V = a^2 I_a + a \, I_b + I_0} \, ,$$
$$\boldsymbol{I_W = a \, I_a + a^2 \, I_b + I_0} \, .$$

4.4.4 Shrnutí podkapitoly 4.4

Podstatou metody souměrných složek je transformace nesouměrné trojfázové soustavy (napětí a proudů) na tři trojfázové (souměrné) soustavy složkové - **souslednou**, **zpětnou** a **nulovou**. Pomocí těchto složkových soustav provedeme analýzu obvodu a z nalezených výsledků přejdeme zpět k nesouměrným soustavám vyjadřujícím hledané řešení.Tato metoda je výhodná zejména při analýze trojfázových energetických systémů obsahujících transformátory, vedení a točivé stroje (alternátory, motory).

Vnitřní struktura těchto zařízení je značně složitá, neboť mezi větvemi jejich fází jsou indukční, popř. kapacitní vazby. Při řešení energetického systému je zpravidla nenahrazujeme příslušnými obvody (byly by dosti složité), ale charakterizujeme je jako celek třemi komplexními impedancemi: souslednou impedancí, zpětnou impedancí a nulovou impedancí. Výhodou tohoto pojetí je, že vlastnosti uvažovaného zařízení charakterizují pouze tři parametry, a to pro jakoukoliv nesouměrnost sítě, na niž je zařízení připojeno. Energetickou soustavu pak řešíme tak, že uvažujeme jednak síť napájenou souslednou napěťovou složkou (přičemž se uplatňuje sousledná impedance), potom síť napájíme zpětnou napěťovou složkou (uplatňuje se zpětná impedance) a posléze síť napájenou nulovou složkou (s uplatněním nulové impedance).

Vzhledem k tomu, že počítače umožňují celkem snadno numericky vyřešit i velmi složitý obvod některou z obecných metod analýzy, není dnes již nepřekonatelnou překážkou provést přesný výpočet, při němž nahrazujeme stroje a zařízení obvody (třeba i složitými), a celou energetickou soustavu řešit jako (velmi složitý) obvod. Význam metody sousledných složek tím pro teorii obvodů poněkud klesá, metoda je však stále velmi důležitá v teorii točivých elektrických strojů.

Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 4.4

1. Na které složky je možné rozložit nesouměrnou trojfázovou soustavu ?
2. Kvalitu přenosu elektrické energie můžeme posuzovat činitelem nesouměrnosti a činitelem nevyváženosti. Jak jsou tito činitelé definováni ?

5 Přechodné děje v lineárních obvodech

Cíle kapitoly: Vyložit metody analýzy přechodných dějů v lineárních obvodech. Vysvětlit a na příkladech obvodů prvního a druhého řádu objasnit formulaci a řešení diferenciálních rovnic obvodů. Vyložit metodu řešení přechodných dějů pomocí Laplaceovy transformace, na příkladech objasnit využití operátorových charakteristik obvodových prvků. Ukázat možnosti řešení periodického ustáleného stavu, seznámit s odezvou obvodu na standardní vstupní signály a signály obecného tvaru. Na jednotlivých příkladech obvodů ukázat jejich základní vlastnosti z hlediska přechodných i impulsních charakteristik, ukázat na souvislost mezi kmitočtovými a časovými charakteristikami obvodů . Z hlediska řešení přechodných dějů objasnit též pojem stability lineárního obvodu.

Test předchozích znalostí :

Příklad 5 - 1

Vyjádřete okamžitou hodnotu napětí na proudu :
a) rezistoru , b) kapacitoru , c) induktoru

Příklad 5 - 2

Vypočtěte x :
a) $x^2 + x - 6 = 0$, b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ c) $x^2 + 2.10^5 + 1{,}01.10^{12} = 0$

Příklad 5 - 3

Vypočtěte y :
a) $y = e^{0,2}$, b) $y = e^{1,2}$, c) $y = e^{3,5}$

Příklad 5 - 4

Vypočtěte y :
a) $y = e^{-0,2}$, b) $y = e^{-0,5}$, c) $y = e^{-2,5}$

Příklad 5 - 5

Vypočtěte y :
a) $y = 1 - e^{-0,2}$, b) $y = 1 - e^{-1,2}$, c) $y = 1 - e^{-5,2}$

Příklad 5 - 6

Načrtněte graf funkce :
a) $y = e^{x}$, b) $y = e^{-x}$, c) $y = 1 - e^{-x}$

Příklad 5 - 7

Vypočtěte limity funkcí:

a) $y = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$, b) $y = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1}$, c) $y = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

5.1 Úvod

Až dosud jsme analyzovali děje v lineárních rezistorových obvodech a ustálené periodické děje v obvodech, obsahujících vedle rezistorů také cívky a kondenzátory.

Rezistorové obvody jsou ***nesetrvačné***. Znamená to, že všechna napětí a proudy, které v těchto obvodech pozorujeme, sledují okamžitě bez jakéhokoliv zpoždění variace signálů, jimiž je obvod buzen. Je-li budicí signál např. sinusový, jsou všechna napětí a proudy v obvodu rovněž sinusové a mají stejný kmitočet i stejnou fázi (případně fázi $180°$) jako budicí signál. Poměry v obvodu jsou přitom zcela stejné, jestliže pracujeme na nízkých, např. zvukových kmitočtech nebo na kmitočtech řádu stovek megahertzů v oblasti velmi krátkých rádiových vln. Z matematického hlediska jsou rezistorové obvody popsány soustavou lineárních algebraických rovnic s konstantními koeficienty.

Obvody obsahující také cívky a kondenzátory, případně cívky se vzájemnou vazbou (tzv. akumulační obvodové prvky), jsou ***setrvačné***. Změny budicích signálů se v různých místech obvodu projeví s určitým časovým zpožděním a časový průběh jednotlivých napětí a proudů v obvodu se v obecném případě vzájemně liší. Setrvačné obvody jsou popsány soustavou obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Řešení poměrů v obvodu závisí na budicích signálech podobně jako u obvodů rezistorových. Navíc však závisí také na energii, která byla na počátku sledovaného děje akumulována v elektrickém poli kondenzátorů a magnetickém poli cívek.

Řešení se obecně skládá ze dvou složek. První z nich, tzv. *přechodná složka*, po kratší nebo delší době prakticky zanikne a dá se zanedbat. Odezva obvodu je pak dána druhou, tzv. *ustálenou* neboli *stacionární složkou*, jejíž charakter závisí především na charakteru budicího signálu. Je-li budicí signál konstantní (stejnosměrné napětí nebo proud), jsou ustálená napětí a ustálené proudy v obvodu rovněž stejnosměrné. V případě, že budicí signál je periodický, je ustálené řešení také periodické (i když se tvarově od budicího signálu v obecném případě liší) a má stejnou periodu jako budicí signál. Pouze v případě, že je budicí signál harmonický (sinusový), je ustálené řešení ve všech uzlech a větvích obvodu také harmonické a je charakterizováno určitou amplitudou a fázovým posuvem. Hovoříme pak o ustáleném harmonickém stavu. K řešení obvodu používáme symbolický zápis pomocí komplexních fázorů pro proudy a napětí a komplexních impedancí resp. admitancí pro popis větví obvodu. Obvod je pak popsán soustavou lineárních rovnic s komplexními a časově neproměnnými koeficienty.

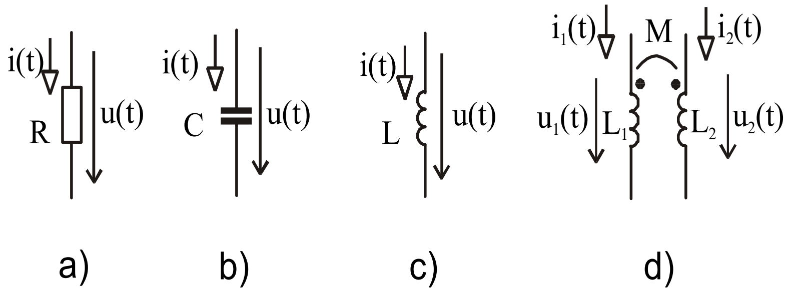
V této kapitole se věnujeme metodám analýzy setrvačných lineárních obvodů s ohledem na ***přechodné děje***. Budeme sledovat přechodné děje vyvolané v zásadě dvěma příčinami:

1) budicím signálem obecného průběhu,
2) náhlou změnou v obvodu, vyvolanou např. připojením, odpojením nebo zkratováním větve.

Nejprve se zmíníme o způsobech formulace výchozích diferenciálních rovnic. Poté ukážeme, jak se tyto rovnice řeší tzv. klasickou metodou a na řadě typických příkladů budeme použití této metody ilustrovat. Dále zavedeme operátorovou metodu řešení diferenciálních rovnic, založenou na Laplaceově transformaci a ukážeme, jak se tímto postupem řeší složitější situace, pro které by klasická metoda byla příliš těžkopádná. Zmíníme se také o numerických postupech, vhodných pro rutinní výpočty na počítači. Na závěr pak budeme definovat přechodnou a impulsovou charakteristiku lineárního obvodu (dvojbranu) a ukážeme, jak tyto charakteristiky souvisejí s kmitočtovými charakteristikami a jaký mají význam pro výpočet odezvy obvodu na vstupní signál obecného průběhu.

5.2 Formulace diferenciálních rovnic obvodu

Diferenciální rovnice obvodu v zásadě vycházejí z obou Kirchhoffových zákonů a k jejich zápisu lze použít všech metod, které jsme pro řešení obvodů dosud poznali. Nejčastěji se ovšem používá metody smyčkových proudů nebo metody uzlových napětí, případně modifikované metody uzlových napětí. Při zápisu rovnic konkrétních větví se pak vychází ze základních vztahů mezi okamžitými hodnotami napětí a proudů u jednotlivých obvodových prvků.



Obrázek 5.2.1 Základní pasivní prvky lineárních obvodů

Uvedeme nyní tyto základní vztahy:
Okamžitá hodnota napětí na rezistoru (obr.5.2-1a) je přímo úměrná hodnotě proudu tekoucího rezistorem v tomtéž okamžiku

$$u(t) = Ri(t) \tag{5.2-1}$$

Konstanta úměrnosti je odpor *R* a měří se v ohmech. Obráceně

$$i(t) = \frac{1}{R}u(t) = Gu(t), \tag{5.2-2}$$

kde *G=1/R* je vodivost v siemensech.

Vztahy (5.2-1) a (5.2-2) ukazují, že grafy časového průběhu napětí *u(t)* i proudu *i(t)* vypadají stejně, liší se jen měřítkem na svislé ose. Rezistor spotřebovává elektrickou energii (mění ji na energii jiného druhu). Okamžitý výkon ztracený v rezistoru je vždy kladný a je roven

$$p(t) = u(t).i(t) = R.i^2(t) = G.u^2(t)\ . \tag{5.2-3}$$

Okamžitá hodnota proudu kondenzátorem (obr.5.2-1b) je rovna derivaci náboje *q(t)* podle času. Protože napětí na kondenzátoru je úměrné náboji a platí

$$u(t) = \frac{q(t)}{C}\ , \tag{5.2-4}$$

kde *C* je kapacita kondenzátoru ve faradech, je

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du(t)}{dt}\ . \tag{5.2-5}$$

Vyjádříme-li napětí

$$u(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt \ , \qquad (5.2\text{-}6)$$

místo neurčitého integrálu (který má význam náboje na kondenzátoru) píšeme v této rovnici obvykle integrál určitý s časem *t* jako horní mezí a máme pak

$$u(t)=u(0_+)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \,. \qquad (5.2\text{-}7)$$

Přísně vzato bychom v tomto integrálu měli značit integrační proměnnou jinak, např. τ. Protože však hodnota určitého integrálu nezávisí na způsobu označení integrační proměnné a je závislá na integračních mezích, píšeme i zde *t* a nevede to k žádným potížím.

Kondenzátor akumuluje energii v elektrickém poli. Okamžitá hodnota akumulované energie je

$$w(t)=\frac{1}{2}q(t)u(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t) \ . \qquad (5.2\text{-}8)$$

Symbolem $u(0_+)$ značíme v rovnici (5.2-7) tzv. ***počáteční napětí*** na kondenzátoru při *t=0,* přísně vzato jde o limitu zprava

$$u(0_+)=\lim_{t\to 0_+} u(t) \ . \qquad (5.2\text{-}9)$$

Toto napětí určuje energii, která je v kondenzátoru akumulována v čase *t=0*, tj. v čase, kdy začínáme sledovat poměry v obvodu. Protože se energie nemůže měnit skokem, musí být i průběh napětí v čase spojitý a $u_C(0_+)=u_C(0_-)$.

Ze vztahů (5.2-5) a (5.2-6) vyplývá, že napětí a proud kondenzátoru mají v obecném případě různý průběh. Tvarově se podobají pouze ve zvláštním případě exponenciální nebo harmonické funkce času.

Napětí na cívce (obr.5.2-1.c) je rovno časové derivaci spřaženého toku $\psi(t)$, který je úměrný okamžité hodnotě proudu cívkou

$$u(t)=\frac{d\psi(t)}{dt}=L\frac{di(t)}{dt} \ . \qquad (5.2\text{-}10)$$

Proud cívkou je potom

$$i(t)=\frac{1}{L}\int u(t)dt=i(0_+)+\frac{1}{L}\int_0^t u(t)dt \ . \qquad (5.2\text{-}11)$$

Energie akumulovaná v cívce je

$$w(t)=\frac{1}{2}\psi(t).i(t)=\frac{1}{2}Li^2(t) \ . \qquad (5.2\text{-}12)$$

Počáteční proud $i(0_+)$ určuje opět počáteční energii, se kterou cívka vstupuje do přechodného děje v obvodu.

Dvojice vázaných cívek (obr.5.2-1d) je popsána vztahy

$$u_1(t) = \frac{d\psi_{11}(t)}{dt} + \frac{d\psi_{12}(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = \frac{d\psi_{21}(t)}{dt} + \frac{d\psi_{22}(t)}{dt} = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \tag{5.2-13}$$

a opačně

$$i_1(t) = i_1(0_+) + k_1 \int_0^t u_1(t)dt + k_M \int_0^t u_2(t)dt$$

$$i_2(t) = i_2(0_+) + k_M \int_0^t u_1(t)dt + k_2 \int_0^t u_2(t)dt \quad . \tag{5.2-14}$$

V těchto rovnicích značí

ψ_{11} celkový spřažený tok cívky L_1,

ψ_{22} celkový spřažený tok cívky L_2,

$\psi_{12} = \psi_{21}$ společný spřažený tok cívek L_1 a L_2

a dále

$$k_1 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2}, \quad k_M = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2}, \quad k_2 = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \ . \tag{5.2-15}$$

Při použití uvedených vztahů vychází popis složitějšího elektrického obvodu jako soustava integrodiferenciálních rovnic. Protože integrální rovnice lze snadno derivováním převést na rovnice diferenciální, obvod jako celek je popsán soustavou n lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, resp. jedinou diferenciální rovnicí n-tého řádu. Obecný tvar této rovnice je

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = y(t) \ , \tag{5.2-16}$$

kde

x(t) je uvažovaná obvodová veličina (napětí, proud, náboj, tok),

$a_{n,}\, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ jsou konstanty závislé na parametrech obvodu,

n je řád rovnice, daný počtem akumulačních prvků (nemůže být vyšší než celkový počet těchto prvků v obvodu),

y(t) je pravá strana rovnice, která je lineární kombinací napětí a proudů nezávislých zdrojů působících v obvodu a jejich časových derivací.

5.2.1 Shrnutí k podkapitole 5.2

K zápisu diferenciálních rovnic obvodu, které v zásadě vycházejí z obou Kirchhoffových zákonů, se používá nejčastěji metody smyčkových proudů nebo metody uzlových napětí, případně modifikované metody uzlových napětí. Při zápisu rovnic konkrétních větví se vychází ze základních vztahů mezi okamžitými hodnotami napětí a proudů u jednotlivých obvodových prvků:

$u(t) = R.i(t)$ pro rezistor, $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$ pro induktor, $u(t) = \dfrac{1}{C}\int i(t)dt$ pro kapacitor.

Při použití uvedených vztahů vychází popis složitějšího elektrického obvodu jako soustava integrodiferenciálních rovnic. Integrální rovnice lze snadno derivováním převést na rovnice diferenciální, obvod jako celek je potom popsán soustavou n lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, resp. jedinou diferenciální rovnicí n-tého řádu:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = y(t) \ .$$

5.3 Řešení diferenciální rovnice obvodu v časové oblasti

5.3.1 Základní úvahy

V této části kapitoly se budeme zabývat tzv. *klasickým postupem* při řešení rovnice (5.2-16) neboli řešením této rovnice v časové oblasti. Jak uvidíme, po celou dobu řešení budeme pracovat s reálnými funkcemi času, které jsou lineárně závislé na hledaných napětích a proudech v obvodu.

Řešení rovnice (5.2-16) se skládá z *obecného řešení homogenní rovnice* $x_0(t)$ a z *partikulárního řešení* (partikulárního integrálu) $x_p(t)$:

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t) \ . \qquad (5.3\text{-}1)$$

Homogenní rovnice

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \qquad (5.3\text{-}2)$$

se liší od původní rovnice (5.2-16) tím, že má nulovou pravou stranu. Její obecné řešení závisí pouze na vlastnostech samotného obvodu bez nezávislých zdrojů. Je však zásadním způsobem ovlivněno počátečním energetickým stavem obvodu, tj. velikostmi energií akumulovaných v kondenzátorech a cívkách na počátku řešení, tj. při $t=0$.

Charakter řešení rovnice je dán druhem kořenů $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tzv. charakteristické rovnice, což je polynomální rovnice tvaru

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1 \lambda + a_0 = 0 \ . \qquad (5.3\text{-}3)$$

Ze základní věty algebry plyne, že polynom n-tého stupně má právě n kořenů, které mohou být reálné nebo vystupují v komplexně sdružených párech. Pokud jsou kořeny jednoduché, tj. vzájemně odlišné (při řešení obvodů je to nejčastější případ), je řešení homogenní diferenciální rovnice (5.3-2) dáno lineární kombinací exponenciálních funkcí typu $\exp(\lambda_k t)$, tj.

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^{n} K_k e^{\lambda_k t} \quad , \tag{5.3-4}$$

kde $K_1, K_2, ...K_n$ jsou integrační konstanty, jejichž konkrétní hodnoty vypočítáme z počátečních podmínek v soustavě. Má-li některý z kořenů násobnost *m*, píšeme příslušnou část řešení ve tvaru

$$e^{\lambda_k t} \sum_{k=1}^{m} K_k t^{k-1} \quad . \tag{5.3-5}$$

Komplexní kořeny se vyskytují vždy ve dvojicích jako komplexně sdružené, např.

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$.

Takové dvojici pak přísluší část řešení, kterou můžeme psát v některém z následujících tvarů

$$K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = e^{\alpha t} D \sin(\omega t + \varphi) .$$

Konstanty *A* a *B* resp. *D* a φ určíme opět z počátečních podmínek.

Poznamenejme ještě, že kořeny charakteristické rovnice skutečných lineárních obvodů složených z prvků *R, C* a *L* s kladnými hodnotami parametrů mají vždy zápornou reálnou část. To znamená, že reálné kořeny jsou záporné $\lambda_k < 0$ a u komplexně sdružených kořenů je $\alpha < 0$. Řešení homogenní rovnice $x_0(t)$ proto u těchto obvodů vždy splňuje podmínku

$$\lim_{t \to \infty} x_0(t) = 0 \quad . \tag{5.3-6}$$

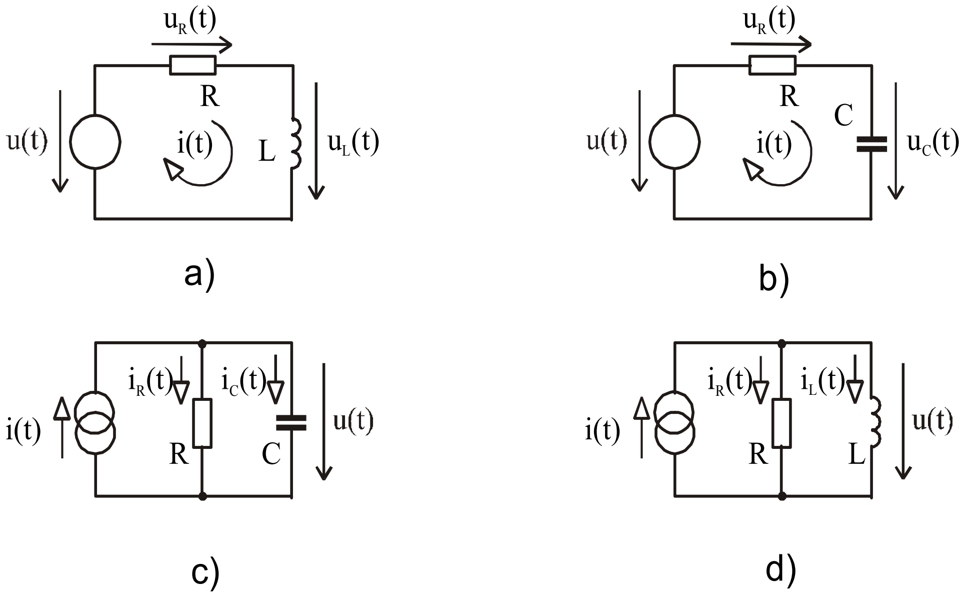
Řešení homogenní rovnice $x_0(t)$ je již celkovým řešením v případě, že *y(t)=0*. Děj ve stabilním obvodu má pak přechodný charakter a po uplynutí dostatečně dlouhé doby zanikne.

Působí-li v obvodu zdroje stejnosměrného nebo periodického napětí a proudu, dosáhne obvod po odeznění přechodného děje $x_0(t)$ stacionárního nebo periodického ustáleného stavu. Vzhledem k (5.3-1) je tedy ustálený stav vyjádřen právě partikulárním řešením $x_p(t)$. To nám umožňuje alespoň v jednodušších případech vypočítat partikulární řešení metodami, které jsme již dříve poznali v souvislosti s řešením rezistorových obvodů resp. setrvačných obvodů s harmonickým napájením.

5.3.2 Obvody 1. řádu

Obvody 1. řádu jsou obvody, popsané diferenciální rovnicí 1. řádu. Patří k nim sériové a paralelní obvody *RL* a *RC*, nakreslené na obr.5.3-1. S takovými obvody se v praxi často setkáváme buďto jako se skutečnými obvody anebo jako s tzv. obvody náhradními, modelujícími zjednodušeným způsobem nějakou složitější situaci. Jako příklad takového náhradního obvodu ve tvaru sériového spojení rezistoru a induktoru můžeme uvést schéma respektující vedle indukčnosti vinutí elektrického stroje také odpor vodiče, z něhož je vinutí realizováno. Jiným příkladem může být paralelní obvod *RC*, ve kterém prvek *R* respektuje nedokonalosti dielektrika kondenzátoru.

Na řadě příkladů s obvody 1. řádu ukážeme metodiku řešení typických situací. Většina závěrů, ke kterým dojdeme, bude pak použitelná i pro obvody složitější.

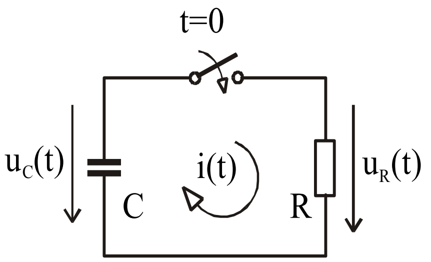


Obrázek 5.3.1 Obvody 1. řádu

Obvody na obr.5.3-1a a 5.3-1c jsou duální. Podobně jsou duální zbývající dva obvody na obr.5.3-1b a 5.3-1d. Znamená to, že závěry učiněné pro jeden obvod můžeme patřičným způsobem aplikovat i pro obvod další.

5.3.2.1 Vybíjení kondenzátoru

Uvažujme kondenzátor, ke kterému byl v okamžiku *t=0* připojen paralelní rezistor. Kondenzátor byl původně nabit na napětí U_0. Zajímá nás časový průběh napětí na kondenzátoru (resp. napětí na paralelním spojení kondezátoru a rezistoru) a průběh proudu v obvodu. Schéma je nakresleno na obr.5.3-2.



Obrázek 5.3.2 Vybíjení kondenzátoru přes paralelní rezistor

Podle obrázku je zřejmě

$$u_C(t) = u_R(t) = R.i(t)$$

a současně

$u_C(t) = -\dfrac{1}{C}\int i(t)dt$. Dosadíme-li za proud z první rovnice do druhé a upravíme, dostaneme integrální rovnici pro napětí $u_C(t)$:

$$\frac{1}{RC}\int u_C(t)dt + u_C(t) = 0 \ . \tag{5.3-7}$$

Derivováním převedeme tuto rovnici na rovnici diferenciální

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = 0 \tag{5.3-8}$$

a tu budeme řešit. Příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0$$

má jediný kořen $\lambda = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$,

kde

$$\tau = RC \tag{5.3-9}$$

má rozměr času a nazývá se ***časová konstanta*** obvodu. Protože v obvodu nepůsobí žádný budicí signál, je celkové řešení dáno obecným řešením homogenní rovnice

$$u_C(t) = A.e^{\lambda t} = A.e^{-t/\tau} \ .$$

Integrační konstantu A určíme na základě zadané skutečnosti, že v čase $t=0$ bylo napětí na kondenzátoru rovno U_0:

$$u_C(0_+) = U_0 = A \ .$$

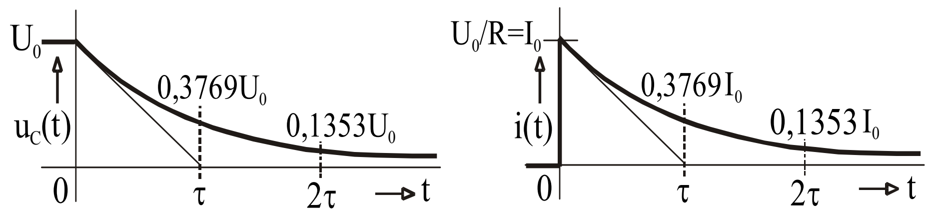
Pro časový průběh napětí na kondenzátoru tedy dostaneme

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_0, \qquad t < 0 \\ u_C(t) &= U_0 e^{-t/\tau}, \quad \mathrm{t} \geq 0 \end{aligned} \tag{5.3-10}$$

a pro proud

$$\begin{aligned} i(t) &= 0, \qquad t < 0 \\ i(t) &= \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \ . \tag{5.3-11}$$

Grafy obou průběhů jsou na obr.5.3-3.



Obrázek 5.3.3 Průběh napětí a proudu při vybíjení kondenzátoru přes rezistor

Z obrázku je zřejmé, že napětí na kondenzátoru klesá rychlostí, která je úměrná vybíjecímu proudu a ten je opět úměrný okamžité hodnotě napětí. Těsně po zahájení přechodného děje klesá napětí největší rychlostí rovnou

$$\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{U_0}{\tau} \ . \tag{5.3-.12}$$

Kdyby pokles napětí pokračoval i dále stejnou rychlostí, dosáhlo by napětí nulové hodnoty v čase rovném časové konstantě τ. Je to zřejmé z obrázku, kde tečna vedená k průběhu $u_C(t)$ resp. $i(t)$ v bodě $t=0$ protíná osu času v $t=\tau$. Ve skutečnosti klesne napětí v čase $t=\tau$ na $U_0 / e = 0{,}3679 U_0$ a za každé další τ ještě e-krát.

Přechodný děj trvá nekonečně dlouho. Ve skutečnosti však jej můžeme pokládat za ukončený po uplynutí doby rovné několikanásobku časové konstanty. Protože je $e^{-3} \doteq 0{,}05$, $e^{-5} \doteq 0{,}0067$, $e^{-7} \doteq 0{,}001$, utlumí se přechodný děj za dobu 3τ zhruba na jednu dvacetinu, za 5τ na jednu stopadesátinu a za 7τ na jednu tisícinu počáteční hodnoty.

Všimneme si ještě energetických poměrů v obvodu. Počáteční energie v kondenzátoru byla

$$W = \frac{1}{2} C U_0^{\,2} \;.$$

V průběhu přechodného děje se celá přeměnila v tepelnou energii v rezistoru. Dokazuje to výpočet založený na integraci okamžitého výkonu

$$W_R = \int_0^\infty p(t)dt = \int_0^\infty R.i^2(t)dt = \frac{U_0^{\,2}}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{U_0^{\,2}}{R} \frac{RC}{2} \left| e^{-2t/RC} \right|_0^\infty = \frac{1}{2} C U_0^{\,2} \,. \quad (5.3.\text{-}13)$$

5.3.2.2 Přechodný děj v RL obvodu

Uvažujeme sériový obvod RL podle obr.5.3-1a, napájený ze zdroje harmonického napětí, které v čase $t=0$ odpojíme a obvod zkratujeme.

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \sin(\omega t + \varphi), \quad t < 0 \\ u(t) &= 0, \quad t > 0 \end{aligned} \;.$$

Předpokládáme, že již před $t=0$ byl obvod v ustáleném harmonickém stavu. Proto proud obvodem v $t<0$

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad \varphi = arctg \frac{\omega L}{R} \quad (5.3\text{-}14)$$

a v okamžiku $t=0$

$$i(0_+) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\psi - \varphi) \;. \quad (5.3\text{-}15)$$

Zajímá nás přechodný děj pro $t>0$. Obvod je zkratován, nepůsobí v něm již žádný zdroj. Diferenciální rovnice pro proud obvodem vychází z 2. Kirchhoffova zákona

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0 \;,$$

po úpravě

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0 \;.$$

Charakteristická rovnice má jediný kořen

$$\lambda = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau} \;.$$

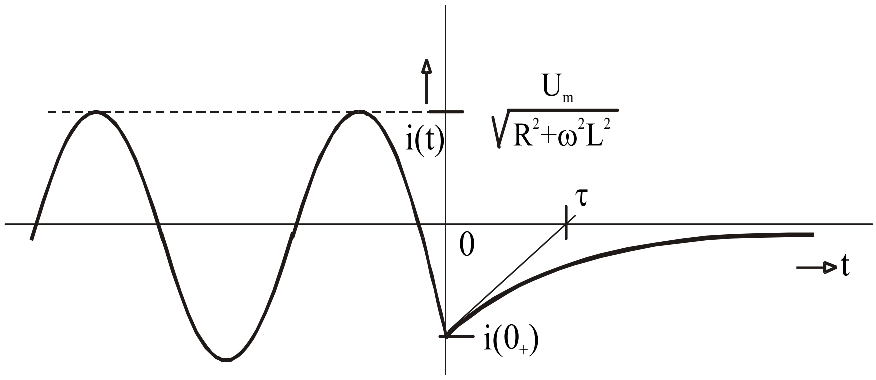
Jako časovou konstantu v tomto případě označujeme

$$\tau = \frac{L}{R} \ . \tag{5.3-16}$$

Výsledné řešení pro proud v obvodu v *t>0* je tedy

$$i(t) = i(0_+)e^{-t/\tau} = \left[\frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\psi - \varphi) \right] e^{-t/\tau} \tag{5.3-17}$$

Graf průběhu proudu pro určité konkrétní hodnoty ψ, φ a τ je nakreslen na obr.5.3-4.



Obrázek 5.3.4 Průběh proudu v obvodu *RL*

Je zřejmé, že přechodný děj pro *t>0* závisí především na rozdílu $\psi - \varphi$, tj. na konkrétním okamžiku, kdy odpojíme zdroj a obvod zkratujeme.

5.3.2.3 Nabíjení kondenzátoru přes rezistor

V sériovém obvodu na obr.5.3-1b předpokládáme, že napájecí napětí má konstantní hodnotu $u(t) = U$. Kondenzátor byl nabit na počáteční napětí $u(0_+) = U_0$. Hledáme časové průběhy $u_C(t), i(t)$ a $u_R(t)$ po připojení zdroje napětí k obvodu.

Z 2. Kirchhoffova zákona vyplývá :

$$Ri(t) + u_C(t) = U \ .$$

Proud *i(t)* vyjádříme jako $C.du_C / dt$ a upravíme

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_C(t) = \frac{U}{RC} \ . \tag{5.3-18}$$

Řešení homogenní rovnice je opět

$$u_{C_0}(t) = Ae^{-t/\tau}, \ \tau = RC \ .$$

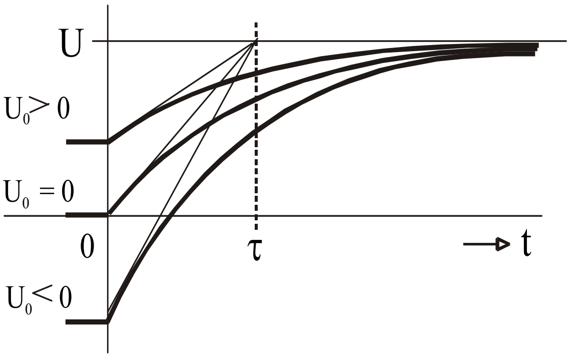
Partikulární řešení je dáno ustáleným stavem v obvodu, kdy napětí na kondenzátoru zřejmě dosáhne hodnoty *U*. Celkové řešení diferenciální rovnice je tedy

$$u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + U \ .$$

V čase *t=0* je $u_C = U_0$, proto integrační konstanta $A = U_0 - U$ a konečný tvar řešení můžeme psát jako

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} + U(1-e^{-t/\tau}) = U - (U-U_0)e^{-t/\tau} = U_0 + (U-U_0)(1-e^{-t/\tau}) \,. \quad (5.3\text{-}19)$$

Typické průběhy napětí na kondenzátoru uvádí obr.5.3-5.



Obrázek 5.3.5 Průběhy napětí při nabíjení kondenzátoru při různých hodnotách počátečního napětí

Průběhy odpovídají obvodu s *τ=konst*, ale s různými počátečními napětími U_0. Z obrázku je zřejmé, jakou roli opět hraje časová konstanta obvodu τ. Je rovněž patrné, že v případě $U_0 = U$ k žádnému přechodnému ději nedojde.

Poznámka:
Analogické poměry platí v sériovém obvodu *RL* na obr.5.3-1a. Připojíme-li na něj konstantní napětí *U,* teče v ustáleném stavu obvodem konstantní proud *U/R.* Pokud byl počáteční proud obvodem I_0, odvodíme pro okamžitou hodnotu proudu v *t>0*

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} + \frac{U}{R}(1-e^{-t/\tau}) = \frac{U}{R} - (\frac{U}{R} - I_0)e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{R} \,. \qquad (5.3\text{-}20)$$

5.3.2.4 Přechodný děj v obvodu RL napájeném harmonickým napětím

Uvažujeme opět sériový obvod *RL* podle obr.5.3-1a. V obvodu platily nulové počáteční podmínky, tj. $i(0_+) = 0$. V čase *t=0* jsme k obvodu připojili zdroj harmonického napětí

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \,. \qquad (5.3\text{-}21)$$

Diferenciální rovnice pro výpočet proudu má tvar

$$L\frac{di(t)}{dt} + R.i(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \,. \qquad (5.3\text{-}22)$$

Řešení homogenní rovnice je

$$i_0(t) = Ae^{-t/\tau}, \ \tau = L/R \,.$$

Partikulární řešení určíme jako řešení v harmonickém ustáleném stavu

$$i_p(t) = \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \ \ \varphi = arctg\frac{\omega L}{R} \,. \qquad (5.3\text{-}23)$$

Celkové řešení je tedy

$$i(t) = i_0(t) + i_p(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi) \,. \qquad (5.3\text{-}24)$$

Protože $i(0_+) = 0$, je integrační konstanta

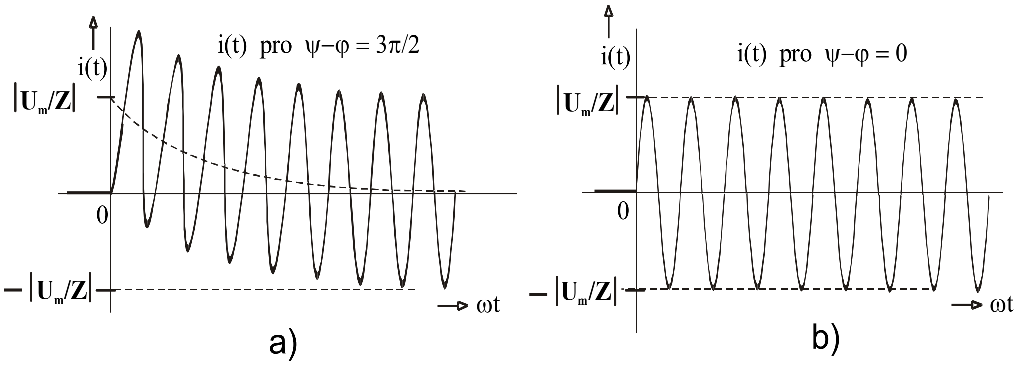
$$A = -\frac{U_m}{Z}\sin(\psi - \varphi)$$

a výsledné řešení pro *t>0*

$$i(t) = \frac{U_m}{Z}[\sin(\omega\, t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi)e^{-t/\tau}] \; . \qquad (5.3\text{-}25)$$

Přechodná složka proudu $i_0(t) = -\frac{U_m}{Z}\sin(\psi - \varphi)e^{-t/\tau}$

závisí na okamžiku připojení zdroje, který je zde vyjádřen úhlem ψ. Největší je pro $\psi - \varphi = \pi/2$, resp. $\psi - \varphi = 3\pi/2$.



Obrázek 5.3.6 Děj v obvodu *RL* při napájení harmonickým napětím :
a) maximální přechodná složka, b) nulová přechodná složka

Pak je výsledný proud $i(t) = \pm\frac{U_m}{Z}(\cos\omega\, t - e^{-t/\tau})$.

Když naopak $\psi = \varphi$, přechodná složka neexistuje a obvodem protéká od samého počátku ustálený proud

$$i(t) = \frac{U_m}{Z}\sin\omega\, t \quad .$$

Oba tyto případy jsou nakresleny na obr.5.3-6. Časová konstanta obvodu je volena tak, aby $\omega\tau = \omega L/R = 25$, *tj.* $\varphi \doteq 87{,}7^\circ$.

Poznámka:

Velikost přechodné složky závisí také na počátečních podmínkách. Jestliže uvažujeme $i(0_+) = I_0$, bude celkové řešení

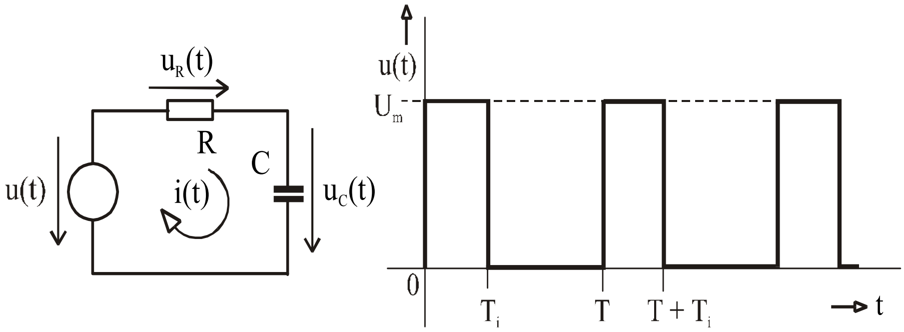
$$i(t) = [I_0 - \frac{U_m}{Z}\sin(\psi - \varphi)]e^{-t/\tau} + \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi) \qquad (5.3\text{-}26)$$

a přechodná složka bude exponenciálně klesat z počáteční hodnoty

$$I_0 - \frac{U_m}{Z}\sin(\psi - \varphi) \; .$$

5.3.2.5 Napájení obvodu RC periodickým obdélníkovým napětím

Uvažujeme obvod *RC* na obr.5.3-1b, jehož vstupní napětí je počínaje okamžikem *t=0* obdélníkové s periodou *T* a amplitudou U_m. Délka pulsů je T_i. Graf vstupního napětí je na obr.5.3-7. Předpokládáme počáteční napětí na kondenzátoru rovné U_0.



Obrázek 5.3.7 Periodické obdélníkové napětí na vstupu obvodu

Situace v obvodu je po dobu trvání prvního pulsu stejná, jako kdyby na vstup bylo přivedeno stejnosměrné napětí rovné U_m. Proto podle (5.3-12)

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} + U_m(1 - e^{-t/\tau}), \quad 0 \le t \le T_i\,. \tag{5.3-27}$$

Na konci pulsu, kdy $t = T_i$

$$u_C(T_i) = U_0 e^{-T_i/\tau} + U_m(1 - e^{-T_i/\tau})\,. \tag{5.3-28}$$

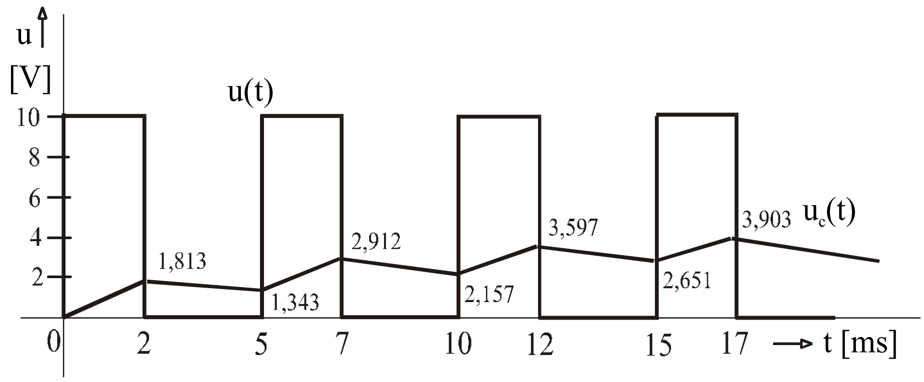
Od tohoto okamžiku až do konce periody je vstupní napětí rovno nule a kondenzátor se proto vybíjí z "počátečního" napětí $u_C(T_i)$. Platí tedy

$$u_C(t) = u_C(T_i) e^{-\frac{t-T_i}{\tau}}, \quad T_i \le t \le T \tag{5.3-29}$$

a na konci periody

$$u_C(T) = u_C(T_i) e^{-\frac{T-T_i}{\tau}} = [U_0 e^{-\frac{T_i}{\tau}} + U_m(1 - e^{-\frac{T_i}{\tau}})] e^{-\frac{T-T_i}{\tau}}\,. \tag{5.3-30}$$

Popsaným způsobem můžeme postupovat i v následujících časových intervalech. Příklad průběhu napětí $u_C(t)$ pro $U_0 = 0$ (nulové počáteční podmínky) je nakreslen na obr.5.3-8.



Obrázek 5.3.8 Přechodný děj v obvodu *RC* při napájení obdélníkovým napětím. Časová konstanta obvodu $\tau = 10\,\mathrm{ms}$

Z obrázku je vidět, že během pulsu napětí na kondenzátoru narůstá, v mezeře mezi pulsy klesá. Po uplynutí dostatečně dlouhé doby (řádově několik časových konstant) je možno přechodnou složku napětí zanedbat. V obvodu existuje ustálený periodický stav.

Aby tento stav existoval v obvodu od samého počátku, je zřejmě třeba, aby počáteční napětí $u_C(0_+) = U_0$ bylo nastaveno na hodnotu, na niž se napětí na kondenzátoru vrátí na konci periody. Tedy

$$U_0 = U_0 e^{-\frac{T}{\tau}} + U_m (1 - e^{-\frac{T_i}{\tau}}) e^{-\frac{T-T_i}{\tau}} . \tag{5.3-31}$$

Úpravou

$$U_0 (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) = U_m e^{-\frac{T}{\tau}} (e^{\frac{T_i}{\tau}} - 1)$$

a konečně

$$U_0 = U_m e^{-\frac{T}{\tau}} \frac{e^{\frac{T_i}{\tau}} - 1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} = U_m \frac{e^{\frac{T_i}{\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} . \tag{5.3-32}$$

Napětí v ustáleném stavu pak kolísá mezi minimální hodnotou U_0 a maximální hodnotou, která je zřejmě rovna

$$U_h = \frac{U_0}{e^{-\frac{T-T_i}{\tau}}} = U_0 e^{\frac{T-T_i}{\tau}} . \tag{5.3-33}$$

Dosadíme-li konkrétní hodnoty z obr.5.3-8, máme

$$U_0 = 10 \frac{e^{0,2} - 1}{e^{0,5} - 1} = 3{,}4130 \text{ V}, \quad U_h = 3{,}4130 e^{0,3} = 4{,}6072 \text{ V} .$$

Střední hodnota průběhu napětí v ustáleném stavu musí být zřejmě rovna střední hodnotě vstupního průběhu, která je

$$U_{ss} = U_m \frac{T_i}{T} = 4 \text{ V} .$$

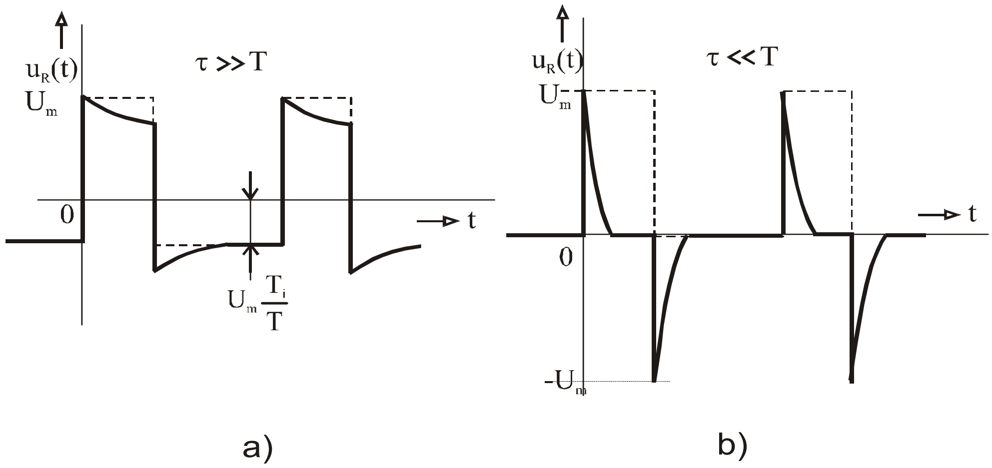
Napětí na rezistoru je rovno rozdílu mezi vstupním napětím a napětím na kondenzátoru a v každém okamžiku je úměrné proudu obvodem

$$u_R(t) = R.i(t) = u(t) - u_C(t) .$$

Jeho konkrétní průběh závisí na velikosti časové konstanty resp. na poměru délky periody k časové konstantě T/τ. Je-li τ>>T, je napětí na kondenzátoru v ustáleném stavu prakticky konstantní a rovné stejnosměrné složce vstupního napětí U_{ss}. Napětí $u_R(t)$ má pak přibližně obdélníkový průběh jako vstupní napětí $u(t)$, avšak s nulovou stejnosměrnou složkou.

Ukazuje to obr.5.3-9a.

Je-li na druhé straně τ<<T,dochází při každé změně vstupního napětí k rychlému nabití nebo vybití kondenzátoru a to se projeví krátkými impulsy proudu kladné nebo záporné polarity. Na rezistoru jsou pak střídavě kladné a záporné pulsy s amplitudou U_m a dobou trvání řádově rovnou časové konstantě, jak je vidět z obr.5.3-9b.



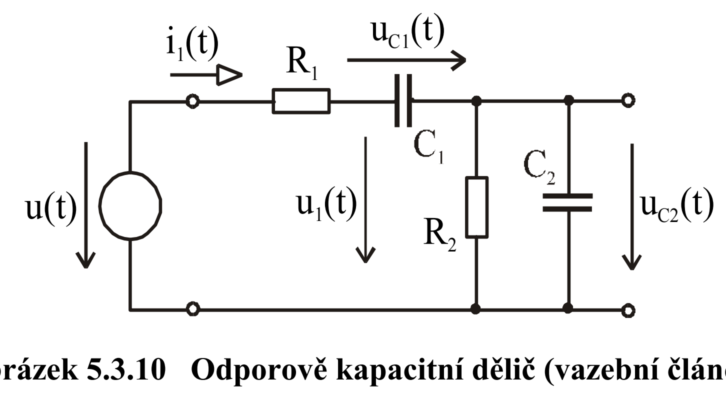
Obrázek 5.3.9 Průběh napětí na rezistoru v ustáleném periodickém stavu: a) velká časová konstanta, b) malá časová konstanta

5.3.3 Obvody 2.řádu

V obvodu druhého řádu jsou dva setrvačné prvky, které mohou být stejného druhu (dva kondenzátory nebo dvě cívky) nebo různého druhu (jeden kondenzátor a jedna cívka). Postup řešení se v zásadě neliší od postupů používaných u obvodů 1. řádu, řešení je však pracnější. Také charakter procesů v obvodu může být rozmanitější než v případě obvodů 1. řádu.

Charakteristická rovnice obvodu 2. řádu má dva kořeny λ_1, λ_2. Jsou-li v obvodu dva setrvačné prvky stejného druhu, jsou kořeny charakteristické rovnice různě velká záporná reálná čísla. Přechodný děj má tzv. aperiodický charakter. Jde-li o obvod, obsahující současně kondenzátor i cívku, mohou být kořeny reálné různé, reálné shodné (tj. jeden kořen dvojnásobný) nebo mohou tvořit komplexně sdružený pár se zápornou reálnou částí. Odpovídající přechodný děj pak je aperiodický nebo tlumeně kmitavý. Jednotlivé typické případy ukážeme na příkladech.

5.3.3.1 Přechodný děj v odporově kapacitním děliči



Vyšetříme přechodný děj v obvodu, jehož schéma je na obr.5.3-10.
Jde o dělič napětí s dvěma impedancemi, který se používá např. jako vazební obvod mezi sousedními stupni zesilovačů.

Obrázek 5.3.10 Odporově kapacitní dělič (vazební článek)

Ze 2. Kirchhoffova zákona vyplývá

$$u(t) = R_1 i_1(t) + u_{C1}(t) + u_{C2}(t) = R_1 C_1 \frac{du_{C1}(t)}{dt} + u_{C1}(t) + u_{C2}(t) \tag{5.3-34}$$

a dále z 1. Kirchhoffova zákona

$$i_1(t) = C_1 \frac{du_{C1}(t)}{dt} = \frac{1}{R_2} u_{C2}(t) + C_2 \frac{du_{C2}(t)}{dt} \ . \tag{5.3-35}$$

Tím jsme získali soustavu diferenciálních rovnic pro napětí na obou kondenzátorech. Po menších úpravách můžeme soustavu rovnic zapsat :

$$\begin{aligned} R_1 C_1 \frac{du_{C1}}{dt} + u_{C1} & & + u_{C2} = u \\ -R_2 C_1 \frac{du_{C1}}{dt} + & \quad R_2 C_2 \frac{du_{C2}}{dt} & + u_{C2} = 0 \end{aligned} \ . \tag{5.3-36}$$

Z první rovnice vyjádříme u_{C2}

$$u_{C2} = u - R_1 C_1 \frac{du_{C1}}{dt} - u_{C1} \ ,$$

vypočítáme derivaci

$$\frac{du_{C2}}{dt} = \frac{du}{dt} - R_1 C_1 \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} - \frac{du_{C1}}{dt}$$

a dosadíme do druhé rovnice. Dostaneme tak diferenciální rovnici 2. řádu

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2) \frac{du_{C1}}{dt} + u_{C1} = u + R_2 C_2 \frac{du}{dt} . \tag{5.3-37}$$

Její charakteristická rovnice

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \lambda^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2) \lambda + 1 = 0 \tag{5.3-38}$$

má reálné různé kořeny λ_1 a λ_2. Obecné řešení homogenní rovnice je proto

$$u_{C10}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \ .$$

Uvažujme nejprve nulové počáteční podmínky v obvodu, tj. $u_{C1}(0_+) = 0, u_{C2}(0_+) = 0$ a jako vstupní signál stejnosměrné napětí o velikosti U_m, připojené k obvodu v okamžiku *t=0* (říkáme, že na vstup byl přiveden skok napětí o velikosti U_m). Partikulární integrál $u_{C1p}(t)$ odpovídá pak velikosti napětí na kondenzátoru C_1 po ustálení přechodných dějů

$$u_{C1p}(t) = U_m$$

a celkové řešení je

$$u_{C1}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + U_m \ .$$

Z podmínky $u_{C1}(0_+) = 0$ plyne

$$A_1 + A_2 + U_m = 0 \ .$$

Druhou rovnici pro neznámé integrační konstanty dostaneme z podmínky pro derivaci du_{C1} / dt v čase *t=0*:

$$\left.\frac{du_{C1}}{dt}\right|_{t=0} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \frac{1}{C_1} i_1(0_+) \ .$$

Proud $i_1(t)$ se v okamžiku *t=0* mění skokem z nulové hodnoty $i_1(0_-) = 0$ na $i_1(0_+) = U_m / R_1$. Napětí na obou kondenzátorech se skokem změnit nemůže a tak je proud v počátečním okamžiku omezen pouze odporem R_1. Integrační konstanty vypočítáme tedy z rovnic

$$A_1 + A_2 = -U_m ,$$

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \frac{U_m}{C_1 R_1} \ .$$

Řešením rovnic dostaneme

$$A_1 = -\frac{\frac{1}{R_1 C_1} + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} U_m , \quad A_2 = \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} U_m \tag{5.3-39}$$

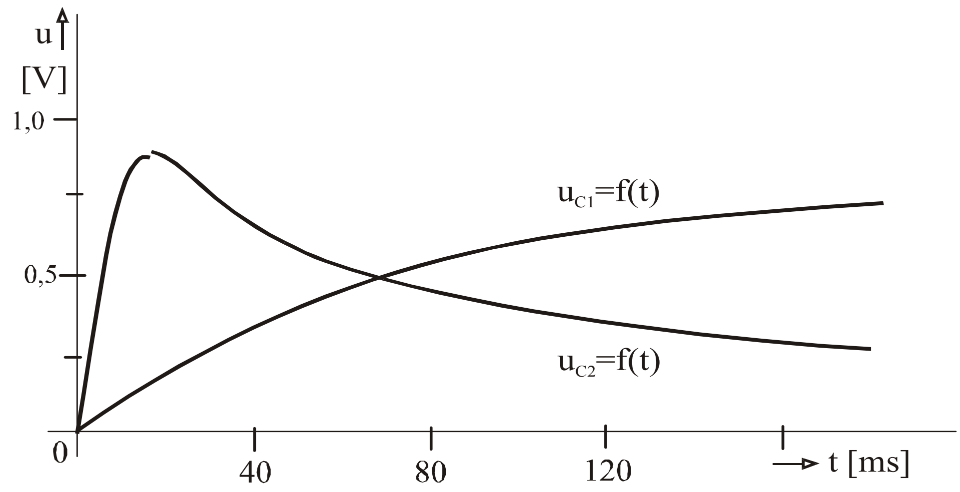
a výsledné řešení je tedy

$$\begin{aligned} u_{C1}(t) &= U_m - U_m \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + U_m \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} = \\ &= U_m + \frac{U_m}{R_1 C_1} \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{U_m}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}) \end{aligned} \tag{5.3-40}$$

Napětí $u_{C2}(t)$ vypočítáme jako

$$u_{C2}(t) = U_m - u_{C1} - R_1 C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = \frac{U_m}{R_1 C_2} \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \ . \tag{5.3-41}$$

Průběhy obou napětí v závislosti na čase jsou zobrazeny na obr.5.3-11. Parametry prvků obvodu jsou $R_1 = 1680\,\Omega, C_1 = 10\,\mu F, R_2 = 12\,\text{k}\Omega, C_2 = 0{,}235\,\mu F$.

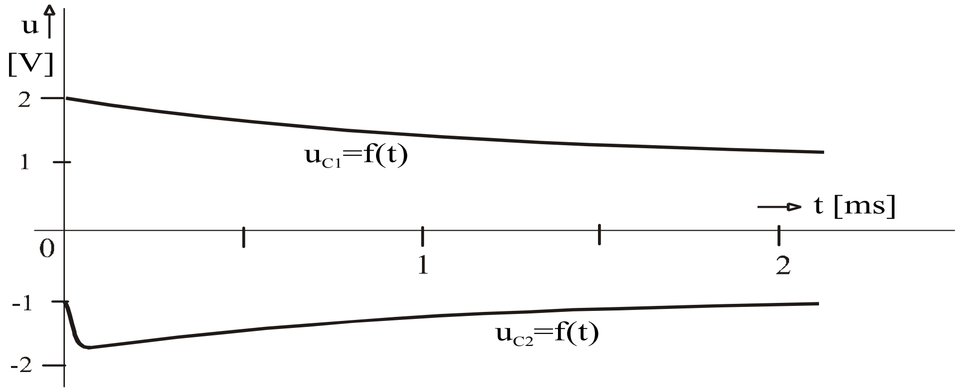


Obrázek 5.3.11 Průběhy napětí na kondenzátorech C_1 a C_2 vyvolané skokem napětí o velikosti U_m na vstupu

Zadání příkladu nyní pozměníme. Budeme uvažovat přechodný děj, vyvolaný pouze nenulovými počátečními napětími na obou kondenzátorech: $u_{C1}(0_+) = U_{01}, u_{C2}(0_+) = U_{02}$. Levé strany diferenciálních rovnic obvodu se nezmění, pravé strany obou rovnic budou však rovny nule. Celkové řešení $u_{C1}(t)$ je rovno obecnému řešení homogenní rovnice

$$u_{C1}(t) = u_{C10}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}\ .$$

Kořeny charakteristické rovnice λ_1 a λ_2 jsou stejné jako v předcházejícím případě. Pro



Obrázek 5.3.12 Průběhy napětí na kondenzátorech C_1 a C_2 v závislosti na čase

integrační konstanty A_1, A_2 odvodíme nyní rovnice

$$u_{C1}(t)\big|_{t=0} = A_1 + A_2 = U_{01}$$

$$\left.\frac{du_{C1}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = -\frac{U_{01} + U_{02}}{R_1 C_1}$$

Proto

$$A_1 = \frac{\lambda_2 U_{01} + \dfrac{U_{01}+U_{02}}{R_1 C_1}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = -\frac{\lambda_1 U_{01} + \dfrac{U_{01}+U_{02}}{R_1 C_1}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Výsledné řešení pro u_{C1}

$$u_{C1}(t) = \frac{U_{01}+U_{02}}{R_1 C_1(\lambda_2-\lambda_1)}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) + U_{01}\frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \tag{5.3-42}$$

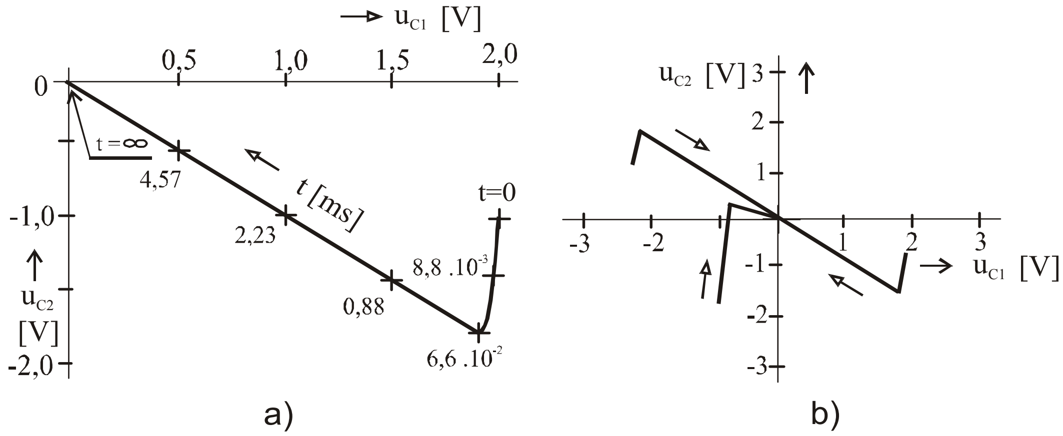
podobně

$$\begin{aligned} u_{C2}(t) &= -u_{C1}(t) - R_1 C_1 \frac{du_{C1}(t)}{dt} = \\ &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}[(\frac{\mathrm{U}_{02}}{\mathrm{R}_1 C_1} - \frac{\mathrm{U}_{02}}{\mathrm{R}_1 C_2})(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) + U_{02}(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})] \end{aligned} \tag{5.3-43}$$

Na obr.5.3-12 jsou nakresleny průběhy obou napětí pro $U_{01} = 2\,\mathrm{V}$, $U_{02} = -1\,\mathrm{V}$.

Napětí vycházejí ze zadaných počátečních hodnot a po uplynutí dostatečně dlouhé doby klesnou k nule. Veškerá energie, která byla původně akumulována v poli kondenzátorů, se spotřebovala v rezistorech R_1 a R_2.

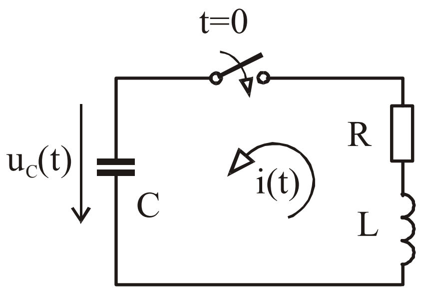
Obr.5.3-13 ukazuje tytéž průběhy zakreslené v rovině (u_{c1}, u_{c2}) a to ve formě jediné čáry. Čas je v tomto obrázku parametrem. Každý bod křivky odpovídá určité hodnotě času. Některé body jsou v obrázku odpovídajícím způsobem označeny.



Obrázek 5.3.13 Záznam přechodného děje v souřadné soustavě (u_{C1}, u_{C2}) : a) s počátečními hodnotami $U_{01} = 2\,\mathrm{V}$, $U_{01} = -1\,\mathrm{V}$, b) trajektorie pro další kombinace počátečních hodnot

Záznam v obr.5.3-13 je tzv. ***stavová trajektorie*** přechodného děje. Rovina (u_{C1}, u_{C2}) je zvláštním případem ***prostoru stavových proměnných*** (stavového prostoru). Trajektorie vzniká jako důsledek pohybu zobrazovacího bodu, jehož souřadnice ve stavovém prostoru jsou v každém okamžiku dány okamžitými hodnotami stavových proměnných. Stavová trajektorie velmi názorným způsobem ukazuje na charakter děje v obvodu. Na obr.5.3-13b je např. vidět, že bez ohledu na konkrétní hodnoty počátečních napětí, průběhy u_{C1} a u_{C2} s narůstajícím časem aperiodicky klesají k nule.

5.3.3.2 Přechodný děj v sériovém obvodu RLC



Obrázek 5.3.14 Sériový obvod *RLC*

Uvažujeme sériový obvod podle obr.5.3-14, složený z kondenzátoru, cívky a rezistoru.

Kondenzátor byl nabit na napětí U_0 a v okamžiku *t=0* byl připojen ke zbytku obvodu.
(Mohli bychom také uvažovat nenulovou počáteční hodnotu proudu v obvodu rovnou I_0, ale pro jednoduchost bereme $I_0 = 0$).

Přechodný děj v obvodu je popsán rovnicí

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_C(t) = RC\frac{du_C(t)}{dt} + LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + u_C(t) = 0 \ . \qquad (5.3\text{-}44)$$

Po úpravě dostaneme diferenciální rovnici 2. řádu pro napětí $u_C(t)$:

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + 2\delta\frac{du_C(t)}{dt} + {\omega_0}^2 u_C(t) = 0 \ . \qquad (5.3\text{-}45)$$

Označili jsme

$\delta = \dfrac{R}{2L}$ činitel tlumení,

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ rezonanční kruhový kmitočet obvodu.

Celkové řešení rovnice je rovno obecnému řešení homogenní rovnice

$$u_C(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

kde λ_1, λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad (5.3\text{-}46)$$

Z počáteční podmínky $u_C(0_+) = U_0$ plyne

$$A_1 + A_2 = U_0 \ .$$

Přítomnost cívky v obvodu zajistí, že $i(0_+) = 0$, tj.

$$\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0 \ .$$

Proto

$$u_C(t) = \frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \ . \qquad (5.3\text{-}47)$$

Všechno nyní závisí na charakteru kořenů λ_1, λ_2. Pokud uvažujeme pouze kladné a reálné hodnoty parametrů obvodu *R, L, C,* můžeme rozlišit čtyři případy:

a) Aperiodicky tlumený děj:

$\delta > \omega_0$, činitel jakosti $0 < Q < 0{,}5$.

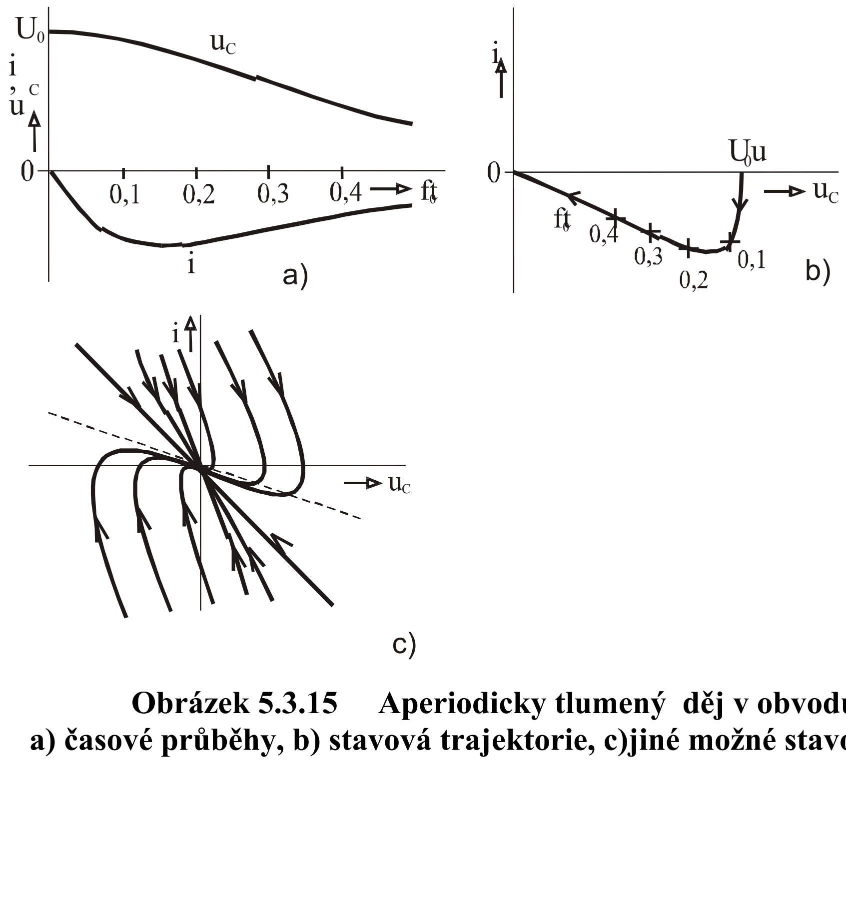
$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \beta \ .$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou záporná reálná čísla. Pak

$$u_C(t) = U_0 e^{-\delta t}(\cosh \beta t + \frac{\delta}{\beta}\sinh \beta t) \ , \qquad (5.3\text{-}48)$$

$$i(t) = -\frac{U_0}{\beta L} e^{-\delta t} \sinh \beta t \ . \qquad (5.3\text{-}49)$$

Obě závislosti jsou pro uvedenou kombinaci parametrů zakresleny na obr.5.3-15a. Odpovídající stavová trajektorie je na obr.5.3-15b (jako stavové proměnné vystupují napětí na kondenzátoru $u_C(t)$ a proud cívkou *i(t)*, což je v tomto případě proud celým obvodem).



Obrázek 5.3.15 Aperiodicky tlumený děj v obvodu *RLC* :
a) časové průběhy, b) stavová trajektorie, c)jiné možné stavové trajektorie

Trajektorie vychází z počátečního bodu $u_C(0_+) = U_0$ a směřuje do počátku souřadnic, který představuje klidový bod pro $t \to \infty$ (je v něm $x = u_C = 0,\ dx/dt = du_C/dt = 0$). Čas t vystupuje v obou obrázcích jako bezrozměrná proměnná $\tau = f_0 t = \dfrac{\omega_0}{2\pi} t$. Při jiných počátečních podmínkách dostaneme obecně jinou trajektorii. Všechny možné trajektorie budou však mít týž charakter. Pro $t \to \infty$ směřují do počátku souřadnic, jak je vidět z obr.5.3-15c. Říkáme, že v počátku leží singulární bod typu ***stabilního uzlu.***

b) Kriticky tlumený děj:

$$\delta = \omega_0,\ \mathrm{Q} = 0{,}5$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \ .$$

Rovnice má jeden dvojnásobný kořen, který je záporný a reálný. Základní řešení je třeba modifikovat. Platí

$$u_C(t) = U_0 e^{-\delta t}(1 + \delta t),\ \ i(t) = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \ . \tag{5.3-50}$$

Časové průběhy $u_C(t)$ a $i(t)$ a tvar stavové trajektorie se podstatně neliší od odpovídajících závislostí při aperiodickém ději.

c) Podkriticky tlumený děj (kmitavý děj):

$$\delta < \omega_0,\ \ Q > 0{,}5$$

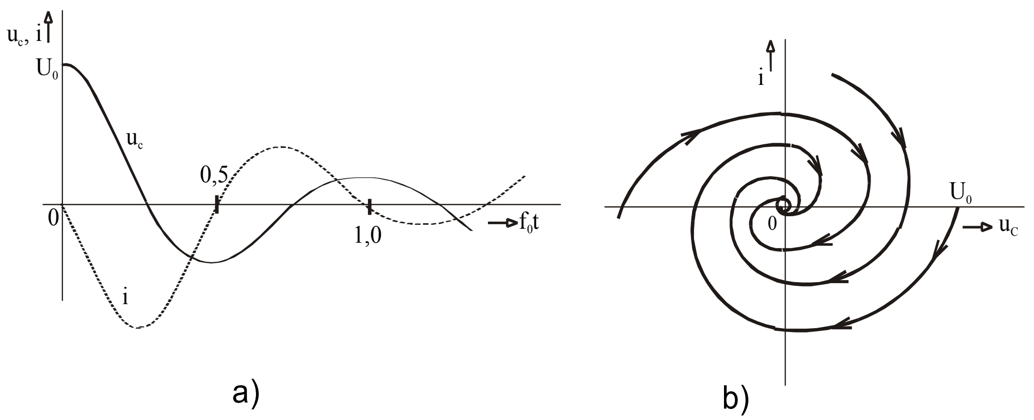
$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_v$$

Kořeny jsou komplexně sdružené a mají záporné reálné části. Platí

$$u_C(t) = U_0 e^{-\delta t}(\cos \omega_v t + \frac{\delta}{\omega_v} \sin \omega_v t) \ , \tag{5.3-51}$$

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_v L} e^{-\delta t} \sin \omega_v t \ . \tag{5.3-52}$$

Oba průběhy jsou harmonické s exponenciálně tlumenou amplitudou. Řešení pro konkrétní případ *(Q=2)* je uvedeno na obr.5.3-16a, odpovídající stavová trajektorie je na obr.5.3-16b.



Obrázek 5.3.16 Kmitavý děj v okruhu *RLC :* a) časové průběhy, b) stavová trajektorie

Na tomto obrázku jsou dále zakresleny ještě dvě trajektorie pro jinou kombinaci počátečních podmínek. Stavové trajektorie mají tvar logaritmických spirál se zmenšujícím se poloměrem. Počátek souřadnic je opět klidovým bodem pro $t \to \infty$.
Nazývá se v tomto případě *stabilní ohnisko*. Podle toho, jak rychle klesá poloměr spirály, můžeme usuzovat na velikost tlumení v okruhu. Klesne-li tlumení na nulu ($Q \to \infty$), dojdeme k poslednímu možnému případu:

d) Netlumený děj:

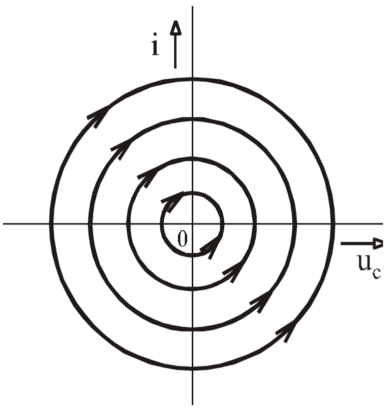
$$\delta = 0,\ Q \to \infty\ ,\quad \lambda_{1,2} = \pm j\omega_0\ .$$

Kořeny jsou čistě imaginární. V tomto případě platí

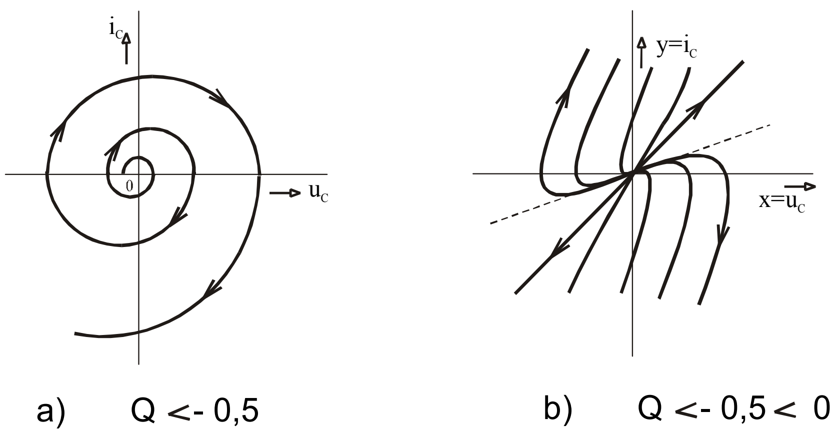
$$u_C(t) = U_0 \cos \omega_0 t,\ \ i(t) = -\frac{U_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t\ . \tag{5.3-53}$$

Průběh napětí i proudu je harmonický, s konstantní amplitudou, jednoznačně danou počátečními podmínkami. Stavové trajektorie jsou uzavřené křivky (elipsy) se středem v počátku souřadnic a s osami, ležícími v souřadných osách. Zvolíme-li vhodně měřítka na osách, dostaneme trajektorie ve tvaru kružnic, jak ukazuje obr.5.3-17.

Uvažujme nyní případ, kdy odpor rezistoru R zapojeného v obvodu bude záporný. Lineární rezistor má vždy kladnou hodnotu odporu. Ukážeme však , že nelineární obvody s rezistory, jejichž VA charakteristika má klesající úsek, mohou být za jistých předpokladů popsány lineární diferenciální rovnicí s *R<0*. Opět lze sledovat tři typické případy:



Obrázek 5.3.17 Stav.trajektorie

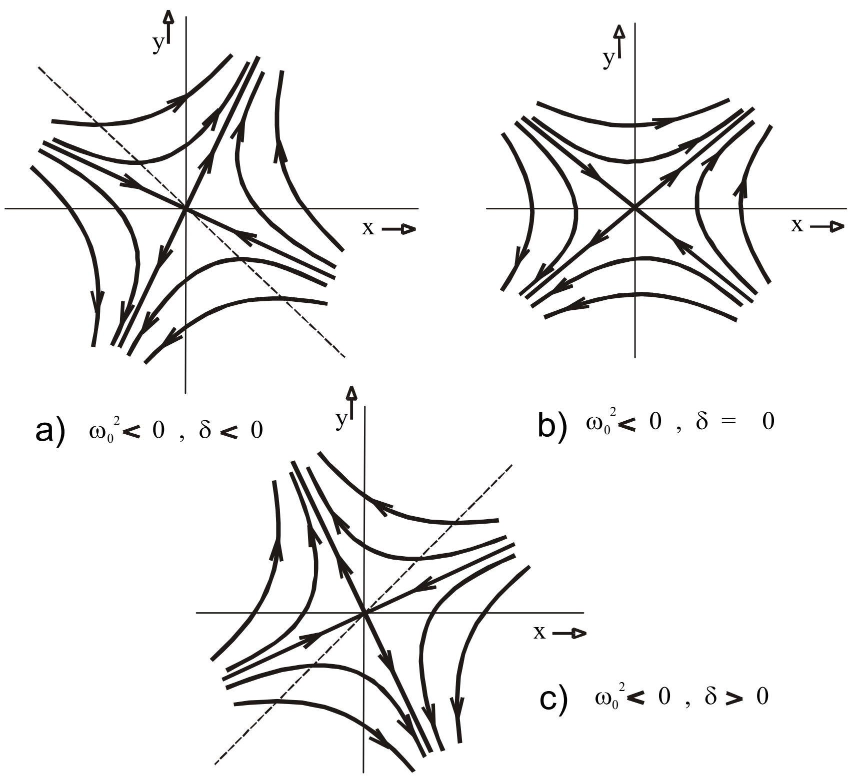


Obrázek 5.3.18 Stavové trajektorie přechodných dějů v okruhu *RLC* se záporným tlumením : a) $Q < -0{,}5$ **, b)** $-0{,}5 < Q < 0$

- netlumený děj v okruhu, podkriticky, kriticky a nadkriticky záporně tlumený děj. Časový průběh napětí $u_C(t)$ a proudu *i(t)* je popsán rovnicemi (5.3-48) až (5.3-52), kde $\delta < 0$, takže exponenciální funkce $e^{-\delta t}$ roste s časem. Typické stavové trajektorie uvádějí obrázky 5.3-18a a 5.3-18b. Na obr.5.3-18a je spirálová trajektorie s rostoucím poloměrem, odpovídající případu $-\delta < \omega_0$ *(Q <-0,5)*. Je zřejmé, že hodnoty $x = u_C$ a $y = dx/dt = -i/C = du_C/dt$ rostou s časem neomezeně. Počátek je jediný bod v rovině *(x, y)*, z něhož nevychází žádná trajektorie. Je to tzv. *nestabilní ohnisko*. Obr.5.3-18b představuje různé trajektorie pro $-\delta > \omega_0$. Zobrazující bod se opět vzdaluje s rostoucím časem do nekonečna. Počátek souřadnic představuje tzv***. nestabilní uzel.***

Ze všech uvedených příkladů vyplývají následující závěry:

Stavová trajektorie názorně ukazuje na charakter děje v soustavě. Podle jejího průběhu můžeme poznat, zda jde o děj s klesající nebo s rostoucí amplitudou (s kladným nebo záporným tlumením) a jak rychle hodnoty proměnných rostou nebo klesají. Uzavřená trajektorie odpovídá periodickému řešení diferenciální rovnice. Pro úplnost ještě uveďme, že v obvodech s nelineárními reaktancemi může být *L* nebo *C* záporné, a tedy $\omega_0^{\,2} < 0$. Pak má charakteristická rovnice dva reálné kořeny, z nichž jeden je záporný a druhý je kladný. Děj v okruhu je nestabilní, protože výrazy pro *x* i *y* obsahují exponenciální členy s kladným součinitelem v exponentu. Stavové trajektorie, odpovídající této situaci, jsou nakresleny na obr.5.3-19a, b, c. Počátek souřadnic je singulární bod, zvaný ***sedlo (sedlový bod)***. Z obrázku plyne, že při vhodné volbě počátečních podmínek lze teoreticky dosáhnout toho, že zobrazující bod přejde po přímkové trajektorii do počátku a obvod je v klidu. Jakkoli malá odchylka od těchto ideálních podmínek však má za následek, že se zobrazující bod odchýlí od této trajektorie a s rostoucím časem se vzdálí do nekonečna.



Obrázek 5.3.19 Stavové trajektorie dějů v okruhu *RLC* se zápornými parametry akumulačních prvků

5.3.4 Shrnutí k podkapitole 5.3 :

Řešení diferenciální rovnice

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = y(t)$$

se skládá z ***obecného řešení homogenní rovnice*** $x_0(t)$ (výše uvedené rovnice s nulovou pravou stranou) a z ***partikulárního řešení*** (partikulárního integrálu, který můžeme určit jako konečný ustálený stav obvodu) $x_p(t)$:

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t) \ .$$

Charakter řešení homogenní rovnice je dán druhem kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tzv. charakteristické rovnice

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \ .$$

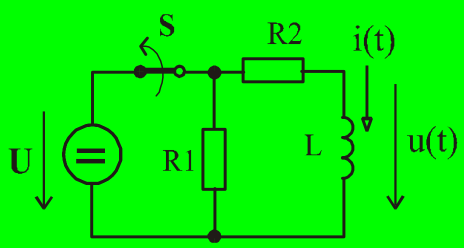
Pro obvody 1.řádu je obecným řešením rovnice exponenciální funkce. Výsledné řešení x (napětí nebo proud) je součtem obecného řešení a partikulárního integrálu a je potom (v závislosti na zapojení obvodu) u těchto obvodů 1.řádu ve tvaru

$x = A.e^{-t/\tau}$, nebo $x = A.(1 - e^{-t/\tau})$, kde τ je časová konstanta obvodu a A je konstanta daná parametry obvodů a zdrojů.

Pro obvody 2.řádu má obecné řešení rovnice dva kořeny λ_1, λ_2. Jsou-li v obvodu dva setrvačné prvky stejného druhu, jsou kořeny charakteristické rovnice různě velká záporná reálná čísla. Přechodný děj má ***aperiodický charakter*** (je popsán součtem exponenciálních funkcí). Jde-li o obvod, obsahující současně kondenzátor i cívku (RLC obvody), mohou být kořeny reálné různé, reálné shodné (tj. jeden kořen dvojnásobný) nebo mohou tvořit komplexně sdružený pár se zápornou reálnou částí. Odpovídající přechodný děj pak je v závislosti na parametrech obvodu ***aperiodický***, tlumeně, nebo netlumeně ***kmitavý***, jak bylo popsáno v předchozích příkladech.

5.3.5 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 5.3

Příklad 5.3-1



Před rozepnutím spínače byl obvod na obrázku v ustáleném stavu. Klasickou metodou (řešením diferenciálních rovnic) odvoďte časový průběh napětí a proudu cívky po rozepnutí spínače, vypočtěte jejich hodnoty v čase t=0-, t=0+,t = 2 ms a t = ∞ , průběhy veličin načrtněte, je - li
$U = 30$ V, $R_1 = 2$ k Ω, $R_2 = 100$ Ω, L = 2H .

5.4 Stavový popis obvodu

Při řešení příkladů v předcházejících odstavcích jsme pozorovali, že procesy v obvodu jsou popsány diferenciálními a nediferenciálními rovnicemi. Pro napětí na každém kondenzátoru a pro proud každou z cívek můžeme napsat jednu diferenciální rovnici 1. řádu. Tyto rovnice jsou vzájemně nezávislé, pokud v obvodu nejsou smyčky složené pouze z kondenzátorů a ideálních napěťových zdrojů nebo uzly, ke kterým jsou připojeny pouze cívky a ideální zdroje proudu. Počet nezávislých diferenciálních rovnic n, popisujících obvod, je tedy nejvýše roven počtu kondenzátorů a cívek v obvodu. Nezávislá napětí na kondenzátorech a nezávislé proudy cívkami v souhrnu určují celkovou energii v obvodu a popisují jeho dynamický stav. Nazýváme je proto ***stavové proměnné***.

Sestavíme-li ze stavových proměnných vektor $\mathbf{x}(t)$, můžeme nezávislé diferenciální tzv. *stavové rovnice* psát v maticovém tvaru takto:

$$\underline{\dot{\mathbf{x}}}(t) = \underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{B}}\,\underline{\mathbf{v}}(t) \quad . \tag{5.4-1}$$

Zde

- $\underline{\dot{\mathbf{x}}}(t)$ označuje n-vektor prvních derivací vektoru $\mathbf{x}(t)$ podle času,
- $\underline{\mathbf{v}}(t)$ je m-vektor zdrojů,
- $\underline{\mathbf{A}}$ je čtvercová matice $n.n$,
- $\underline{\mathbf{B}}$ je obdélníková matice $n.m$.

Prvky obou matic jsou funkcemi parametrů pasivních prvků obvodu.

Zbývající, tzv. ***nestavové veličiny y(t)*** jsou dány nediferenciálními rovnicemi

$$\underline{\mathbf{y}}(t) = \underline{\mathbf{C}}\,\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{D}}\,\underline{\mathbf{v}}(t) \quad . \tag{5.4-2}$$

$\underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{D}}$ jsou opět matice, závislé na parametrech pasivních prvků v obvodu.

Rovnice (5.4-1) představuje popis dynamiky obvodu ve tvaru, který je velmi výhodný pro řešení na počítači (číslicovém nebo i analogovém). Je to dáno tím, že diferenciální rovnice jsou upraveny na tzv. *normální tvar*, kdy vektor prvních derivací $\dot{\mathbf{x}}(t)$ je vyjádřen jako funkce neznámých $\mathbf{x}(t)$ a času t. Použitý zápis lze přímo použít k sestavení programového schématu pro řešení na analogovém počítači. Také pro numerickou integraci takovýchto rovnic existuje celá řada spolehlivých algoritmů. Příkladem mohou být postupy Rungeho a Kutty. Vhodná procedura v jazyku Pascal je v Dodatku č.2. Několik variant algoritmu pro řešení diferenciálních rovnic v normálním tvaru nabízí také soubor matematických programů Matlab.

Pro ilustraci uvedeme zápis rovnic obvodu, jehož schéma je na obr.5.3-10. Vektor stavových proměnných obsahuje v daném případě napětí na kondenzátorech $u_{C1}(t)$ a $u_{C2}(t)$. Úpravou rovnic (5.3-36) z odstavce 5.3.3.1 dostaneme

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{du_{C1}}{dt} \\ \dfrac{du_{C2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & -\dfrac{1}{R_1C_1} \\ -\dfrac{1}{R_1C_2} & -\dfrac{1}{C_2}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C_1} \\ \dfrac{1}{R_1C_2} \end{bmatrix} \times \mathbf{u} \quad . \tag{5.4-3}$$

Jako nestavové proměnné zvolíme např. proud $i_1(t)$ ze zdroje, proud $i_2(t)$ tekoucí odporem R_2 a napětí $u_1(t)$ mezi společným uzlem prvků R_1, C_1 a referenčním uzlem. Pak

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1} & -\dfrac{1}{R_1} \\ 0 & \dfrac{1}{R_2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\times\mathbf{u}\ . \tag{5.4-4}$$

5.5 Řešení přechodných dějů pomocí Laplaceovy transformace

V předcházejících částech této kapitoly jsme analyzovali přechodné děje v lineárních obvodech přímým řešením diferenciálních rovnic obvodu. Je to postup vhodný k řešení jednodušších situací. Skládá se z několika vzájemně navázaných kroků a často vyžaduje promyšlenou volbu dalšího pokračování, má-li být výsledek v souladu s fyzikální představou o podstatě popisovaných jevů. Zvláště výpočet integračních konstant v závislosti na počátečních podmínkách bývá obtížný. Na druhé straně však tento tzv. "klasický" postup umožňuje (právě tím, že k tomu nutí) hlouběji porozumět tomu, co se v obvodu děje a to bývá často stejně důležité jako vlastní výpočet konkrétních časových průběhů sledovaných obvodových veličin.

K analýze přechodných dějů ve složitějších obvodech je vhodné používat metody ***Laplaceovy transformace***. Postup při použití této metody lze rozložit na několik kroků:

1. Sestavíme diferenciání (případně integrodiferenciální) rovnice obvodu a uvážíme, jaké jsou počáteční podmínky. Nezávisle proměnná v těchto rovnicích je čas *t*. Hledané časové průběhy obvodových veličin jsou tzv. ***originály f(t).***

2. Integrodiferenciální rovnice přetransformujeme do oblasti komplexní proměnné ***p***. Místo originálů vystupují nyní v rovnicích tzv. ***obrazy F(p)***. Touto, tzv. *přímou transformací* (při níž jsme vzali v úvahu i počáteční podmínky) přešly původní integrodiferenciální rovnice na rovnice nediferenciální, algebraické.

3. Řešením získaných algebraických rovnic získáme obrazy veličin, které zkoumáme.

4. Provedeme tzv. *zpětnou transformaci*, při které nalezneme k obrazům hledaných obvodových veličin příslušné originály.

Poznámka:

- Krok č.1, tj. sestavení integrodiferenciálních rovnic obvodu lze zejména v případě použití operátorových charakteristik obvodových prvků vynechat a psát přímo nediferenciální (algebraické) rovnice pro obrazy. To platí zvláště u obvodů s nulovými počátečními podmínkami.

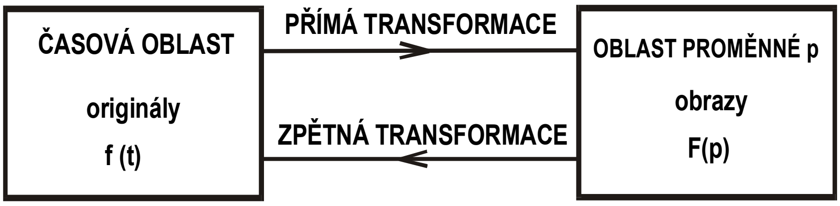
- Uvedený postup poskytuje některé výrazné výhody ve srovnání s přímým řešením rovnic v časové oblasti:

- řešení diferenciálních (integrodiferenciálních) rovnic se převádí na daleko jednodušší problém řešení rovnic algebraických. Připomíná to metodu logaritmování, které umožňuje převést násobení a dělení čísel na podstatně jednodušší slučování jejich logaritmů,

- výsledný časový průběh hledáme jako jeden celek, nemusíme rozlišovat řešení homogenní rovnice a partikulární integrál, ani nemusíme vyšetřovat hodnoty integračních konstant.

5.5.1 Základní vztahy Laplaceovy transformace

Laplaceova transformace je integrální transformace, definující jednojednoznačný vztah mezi tzv. originály v oblasti proměnné t a jejich obrazy v oblasti komplexní proměnné p. Názorně to ukazuje obr.5.5-1.



Obrázek 5.5.1 Schématické znázornění využití přímé a zpětné Laplaceovy transformace

Píšeme

$$F(p) = L[f(t)], \quad f(t) = L^{-1}[F(p)] \ . \tag{5.5-1}$$

Někdy se používá i jiných druhů zápisu jako např.

$$F(p) \Leftrightarrow f(t) \text{ nebo } F(p) \leftrightarrow f(t) \ .$$

Přímá transformace je definována jako nevlastní integrál

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \ , \tag{5.5-2}$$

kde

$$p = \sigma + j\omega, \quad \sigma > 0 \quad \text{a} \quad f(t) = 0 \text{ pro } t < 0 \, .$$

Při integraci podle (5.5-2) se komplexní číslo p pokládá za konstantu.

Zpětná (inverzní) transformace je definována integrálem v oblasti komplexní proměnné p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt}dp \ . \tag{5.5-3}$$

Výpočet podle tohoto vztahu je založen na výpočtu tzv. reziduí funkce *F(p)* a je obecně značně složitý. Při praktickém řešení přechodných dějů se tento postup nepoužívá a zpětná transformace se provádí jednodušeji (pomocí tzv. slovníku, rozkladem, nebo numericky).

Uvedeme nyní některé základní vztahy, platné při použití Laplaceovy transformace. Tyto vztahy lze odvodit (dokázat) na základě rovnice (5.5-2). Důkazy tohoto typu patří do přednášek z matematiky (teorie funkcí komplexní proměnné) a proto je zde uvádět nebudeme. Nejprve ukážeme (viz tab.5.5-1),jak jsou transformovány základní matematické operace.

Tabulka 5.5-1 Transformace matematických operací

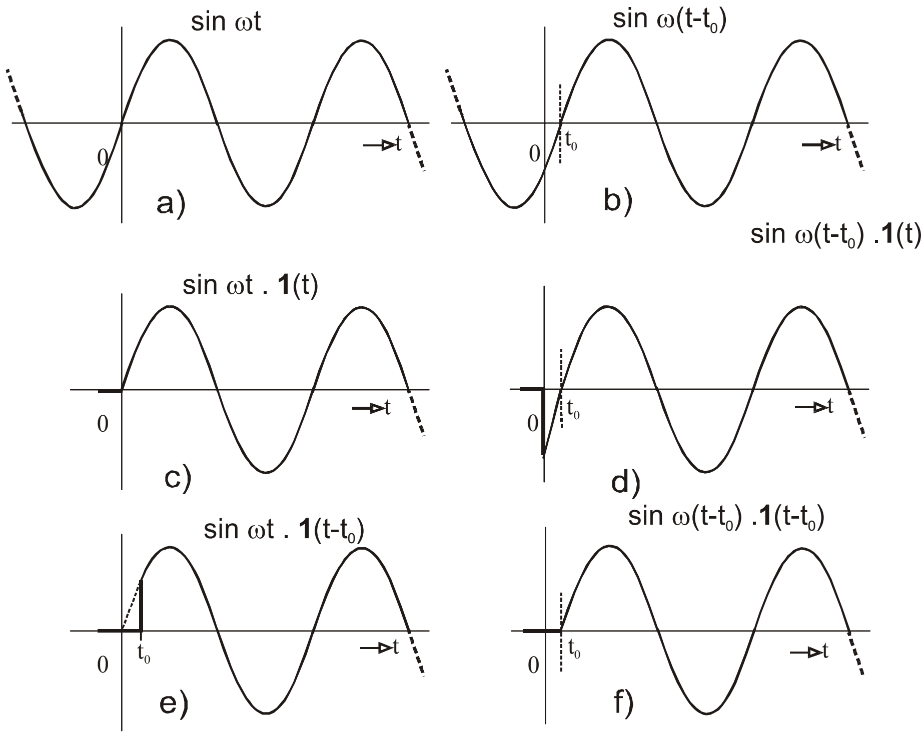
č.	Operace	Časová oblast	Oblast proměnné *p*
1.	Definice transformace	$f(t).\mathbf{1}(t)$	$F(p)$
2.	Násobení konstantou	$A.f(t)$	$A.F(p)$
3.	Změna měřítka	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$
4.	Posuv v čase	$f(t-t_0).\mathbf{1}(t-t_0)$	$e^{-pt_0}.F(p)$
5.	Posuv v *p*	$e^{-at}.f(t)$	$F(p+a)$
6.	1. derivace	$\frac{d}{dt}f(t)$	$pF(p)-f(0_+)$
7.	Neurčitý integrál (primitivní funkce)	$\int f(t)dt = f^{-1}(t)$	$\frac{1}{p}[F(p)+f^{-1}(0_+)]$
8.	Určitý integrál	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{p}F(p)$
9.	Počáteční hodnota	$\lim_{t\to 0_+} f(t)$	$\lim_{p\to\infty} pF(p)$
10.	Konečná hodnota	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{p\to 0} pF(p)$
11.	Konvoluce	$f_1(t)*f_2(t) = \\ = \int_0^t f_1(\alpha).f_2(t-\alpha)d\alpha$	$F_1(p).F_2(p)$

***Některé poznámky k tab.5.5-1*:**

- k č.1.: Funkce ***1****(t)* je tzv. jednotkový skok, tj. ***1****(t) = 0 , t < 0,* ***1****(t) = 1 , t≥0.*
  Zápisem *f(t).****1****(t)* pouze zdůrazňujeme, že *f(t) = 0* pro *t < 0*, jak vyžaduje definice Laplaceovy transformace (5.5-2).
- k č.4.: zápisem $f(t-t_0).\mathbf{1}(t-t_0)$ vyjadřujeme původní průběh *f(t)* posunutý (zpožděný) o t_0. Průběhy na obr.5.5-2 ilustrují použití funkce ***1****(t)* resp.

***1**(t-t₀)* při definici časově omezených průběhů.

- k č.9. a 10.: uvedené vzorce dovolují rychle zjišťovat hodnoty *f(t)* v krajních bodech časového intervalu $<0,\infty)$ bez nutnosti nalézt analytický výraz pro *f(t)*. Má to význam např. pro rychlou kontrolu, zda při odvozování výrazu pro *F(p)* nedošlo k hrubé chybě. Hodnoty $f(0_+)$ a $f(\infty)$ můžeme totiž často určit na základě jednoduché úvahy.
- k č.11.: význam konvoluce funkcí poznáme v odstavci 5.7.1.



Obrázek 5.5.2 Ke značení časově omezených funkcí

Pro praktické výpočty přechodných dějů je důležité umět snadno a rychle určit obraz k danému originálu a naopak. Tomuto účelu dobře poslouží tzv. *slovník* Laplaceovy transformace, jehož příklad je uveden v tab.5.5-2. Jde o tabulky, uvádějící vzájemně odpovídající páry funkcí *f(t)* a *F(p)*. V tab.5.5-2 jsou zapsány jen nejdůležitější dvojice, potřebné pro řešení základních elektrických obvodů. Pro případ potřeby existují i velmi rozsáhlé slovníky [8].

Tabulka 5.5-2 Slovník nejdůležitějších originálů a odpovídajících obrazů

č.	Obraz *F(p)*	Originál *f(t)*	Poznámka
1.	1	$\delta(t)$	jednotkový impuls, viz kap. 5.6.1
2.	$\frac{1}{p}$	$\mathbf{1}(t)$	jednotkový skok

3.	$\frac{1}{p^2}$	t	rampová funkce
4.	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	
5.	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$t.e^{-at}$	
6.	$\frac{a}{p(p+a)}$	$1-e^{-at}$	
7.	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	
8.	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	
9.	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	
10.	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	
11.	$\frac{a}{p^2-a^2}$	sinh at	
12.	$\frac{p}{p^2-a^2}$	cosh at	
13.	$\frac{1}{(p+a)(p^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{a^2+\omega^2}e^{-at}+$ $+\frac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}\sin(\omega t-\varphi)$	$\varphi = arctg\,\frac{\omega}{a}$
14.	$\frac{p}{(p+a)(p^2+\omega^2)}$	$-\frac{a}{a^2+\omega^2}e^{-at}+$ $+\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\cos(\omega t-\varphi)$	$\varphi = arctg\,\frac{\omega}{a}$
15.	$\frac{p^2}{(p+a)(p^2+\omega^2)}$	$\frac{a^2}{a^2+\omega^2}e^{-at}-$ $-\frac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\cos(\omega t-\varphi)$	$\varphi = arctg\,\frac{\omega}{a}$
16.	$\frac{1}{p(p+a)(p^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{a^2+\omega^2}-$ $-\frac{e^{-at}}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi)$	$\varphi = arctg\,\frac{\omega}{a}$

5.5.2 Příklady přímé transformace

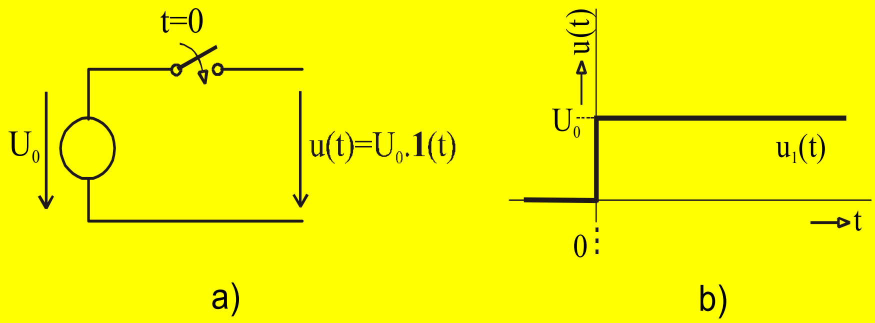
Příklad 5.5-1

Uvažujeme nejprve zdroj konstantního napětí U_0 podle obr.5.5-3a, který v okamžiku *t=0* připojíme k obvodu. Napětí *u(t)* za spínačem má průběh, nakreslený na obr.5.5-3b a vyjádřený vztahem

$$u(t) = U_0.\mathbf{1}(t) \ .$$

Jeho obraz je tedy

$$U(p) = U_0 \frac{1}{p} \ .$$



Obrázek 5.5.3 Skok napětí

Příklad 5.5-2

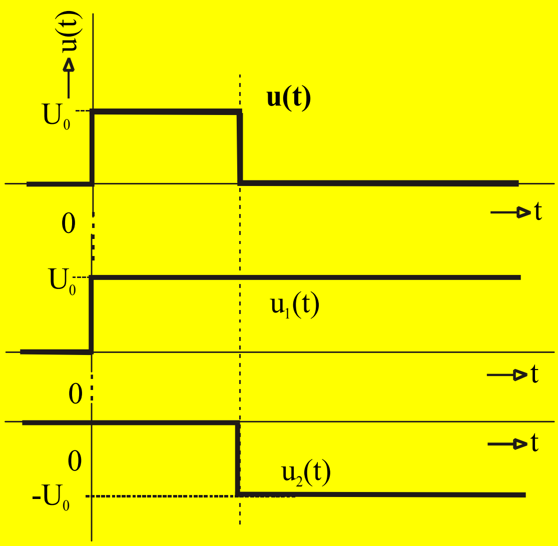
Jednorázový obdélníkový impuls *u(t)* podle obr.5.5-4a) můžeme pokládat za součet dvou dílčích průběhů

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \ ,$$

pro které platí

$u_1(t) = U_0.\mathbf{1}(t), \quad u_2(t) = -U_0.\mathbf{1}(t - T_i)$ .Proto obraz

$$U(p) = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p} e^{-pT_i} = \frac{U_0}{p}(1 - e^{-pT_i}) \ .$$



Obrázek 5.5.4 Jednorázový obdélníkový impuls

Příklad 5.5-3

Jednorázový trojúhelníkový impuls podle obr.5.5-5a je možno vyjádřit jako součet tří rampových průběhů $u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$, které jsou nakresleny na obr.5.5-5b-d.

Průběhy u_1 a u_3 mají stejnou směrnici rovnou

$$\frac{U_0}{\frac{T_i}{2}} = \frac{2U_0}{T_i} ,$$

liší se pouze časovým zpožděním. Průběh u_2 má směrnici $-4U_0/T_i$. Proto platí

$$U(p) = \frac{2U_0}{T_i p^2} - \frac{4U_0}{T_i p^2} e^{-pT_i/2} + \frac{2U_0}{T_i p^2} e^{-pT_i} =$$

$$= \frac{2U_0}{T_i p^2} (1 - 2e^{-pT_i/2} + e^{-pT_i}) = \frac{2U_0}{T_i p^2} (1 - e^{-pT_i/2})^2$$

Příklad 5.5-4

Sinusový průběh podle obr.5.5-6 je popsán v časové oblasti vztahem

$$u(t) = U_m \sin(\frac{2\pi}{T} t).\mathbf{1}(t) .$$

Proto jeho obraz je

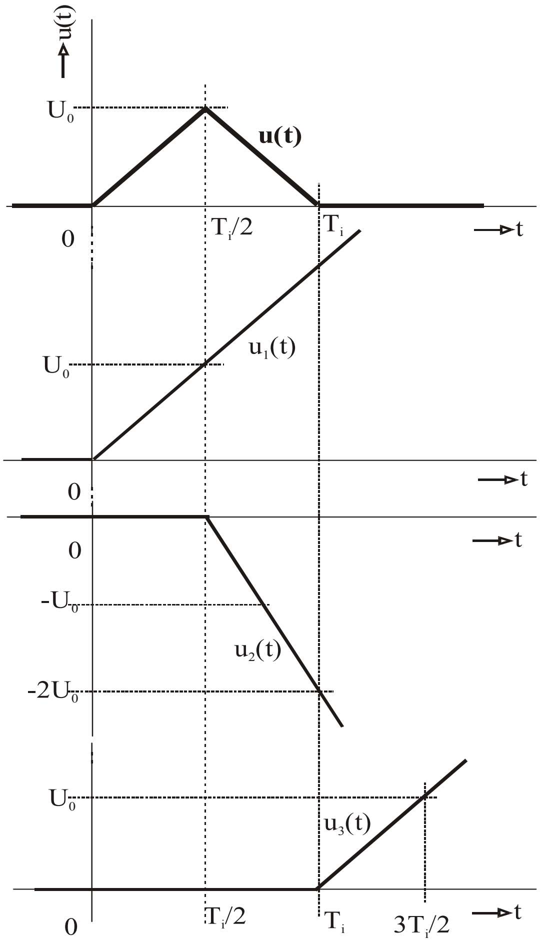
$$U(p) = \frac{U_m \frac{2\pi}{T}}{p^2 + (\frac{2\pi}{T})^2} = \frac{\omega U_m}{p^2 + \omega^2} , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} .$$

Příklad 5.5-5

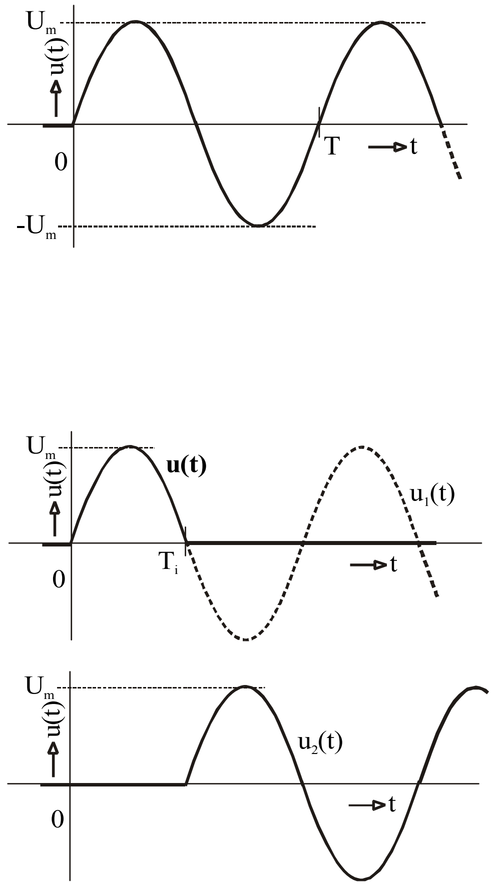
Jednorázový půlsinusový impuls podle obr.5.5-6 je možno pokládat za součet dvou sinusových průběhů vzájemně posunutých o T_i:

$$u(t) = U_m \sin(\frac{\pi}{T_i} t).\mathbf{1}(t) + U_m \sin[\frac{\pi}{T_i} (t - T_i)].\mathbf{1}(t - T_i) .$$

Proto $U(p) = \dfrac{U_m \frac{\pi}{T_i}}{p^2 + (\frac{\pi}{T_i})^2} (1 + e^{-pT_i})$.



Obrázek 5.5.5 Jednorázový trojúhelníkový průběh impuls



Obrázek 5.5.6 Harmonický (sinusový) a půlsinusový impuls

5.5.3 Příklady zpětné transformace

Při zpětné transformaci hledáme originál *f(t)* ke známému obrazu *F(p)*. Nejprve rozdělíme obraz na části násobené exponenciálními výrazy typu e^{-pt_0} (včetně e^0) a každou z těchto částí invertujeme zvlášť. Po ukončení inverze uvážíme pak odpovídající časová zpoždění.

Jak se ukazuje, mají obrazy, se kterými se setkáváme při analýze přechodných dějů v elektrických obvodech se soustředěnými parametry, tvar racionálního zlomku tvaru

$$F(p) = \frac{Q_m(p)}{P_n(p)} \ .$$

V čitateli zlomku je polynom *m*-tého stupně, ve jmenovateli stupně *n*-tého. Přitom $m \le n$.

Originál k takovému obrazu můžeme najít jedním ze tří postupů:

- pomocí slovníku, např. tab.5.5-2,
- pomocí tzv. Heavisideových vzorců,
- numericky.

Uvedeme nejprve několik příkladů na inverzi pomocí slovníku.

5.5.3.1 Inverze pomocí slovníku

Příklad 5.5-6

Hledáme originál k obrazu $F(p) = 20\dfrac{p+500}{p^2+10^6}$.

Protože ve slovníku nemáme žádný obraz, který by přímo odpovídal zadanému zlomku, musíme nejprve zlomek upravit:

$$F(p) = 20\frac{p}{p^2+10^6} + \frac{10^4}{p^2+10^6} = \frac{20p}{p^2+(10^3)^2} + \frac{10.10^3}{p^2+(10^3)^2} \ .$$

Proto zřejmě podle č.10 a 9 v tab.5.5-2

$$f(t) = 20.\cos(1000t) + 10.\sin(1000t) \ .$$

Příklad 5.5-7

Je dáno $F(p) = \dfrac{100p}{5p^2+125p+750}$.

Upravíme výraz na

$$F(p) = \frac{100}{5}\frac{p}{p^2+25p+150} \ .$$

Kořeny jmenovatele funkce jsou

$$p_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625-600}}{2} = \left\langle \begin{matrix} -10 \\ -15 \end{matrix} \right. \ .$$

Proto také

$$F(p) = 20\frac{p}{(p+10)(p+15)}$$

a tedy podle č.8 v tab.5.5-2

$$f(t) = \frac{20}{15-10}(15e^{-15t} - 10e^{-10t}) = 60e^{-15t} - 40e^{-10t} \ .$$

Příklad 5.5-8

Je dána funkce $F(p) = \dfrac{10^7}{p^2+2.10^5 p + 1{,}01.10^{12}}$.

Kořeny jmenovatele jsou komplexně sdružené

$$p_{1,2} = -10^5 \pm j10^6 .$$

Jmenovatele zlomku vyjádříme jako součin kořenových činitelů a upravíme

$$F(p) = \frac{10^7}{(p+10^5-j10^6)(p+10^5+j10^6)} = \frac{10^7}{(p+10^5)^2+10^{12}} = 10\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2} ,$$

$$\omega = 10^6\ s^{-1}, \quad a = 10^5\ s^{-1} .$$

Výsledný obraz odpovídá nyní obrazu č.9 z tabulky, ale místo p obsahuje součet *p+a*, je tedy posunut v oblasti p o hodnotu $a = 10^5$. Podle řádku č.5 v tab.5.5-1 je tedy originálem exponenciálně tlumený průběh

$$f(t) = 10e^{-10^5 t}\sin(10^6 t).$$

5.5.3.2 Heavisideovy vzorce

Při inverzi složitějších obrazů postupujeme tak, že výraz pro *F(p)* rozložíme na součet parciálních (částečných) zlomků a každý z těchto zlomků invertujeme zvlášť. Pro nejčastější případ, kdy jmenovatel má pouze jednoduché kořeny, můžeme použít tzv. Heavisideovy vzorce. Platí

$$L^{-1}\left[\frac{Q_m(p)}{P_n(p)}\right] = \sum \frac{Q_m(p_i)}{P_n'(p_i)} e^{p_i t} \quad . \tag{5.5-4}$$

V případě, že jeden kořen jmenovatele leží v počátku, máme

$$L^{-1}\left[\frac{Q_m(p)}{pP_n(p)}\right] = \frac{Q_m(0)}{P_n(0)} + \sum \frac{Q_m(p_i)}{p_i P_n'(p_i)} e^{p_i t} \quad . \tag{5.5-5}$$

Symbolem $P_n'(p_i)$ značíme první derivaci $dP_n(p)/dp$ pro $p = p_i$.

Příklad 5.5-9

Hledáme originál k obrazu

$$F(p) = \frac{p+4}{2p^2 + 5p + 3} \quad .$$

Máme tedy

$$Q_1(p) = p + 4, \quad P_2(p) = 2p^2 + 5p + 3, \quad P_2'(p) = \frac{d}{dp} P_2(p) = 4p + 5 \ .$$

Kořeny jmenovatele jsou $p_1 = -1, \quad p_2 = -1{,}5$.

Konečně

$$f(t) = \frac{Q_1(p_1)}{P_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{Q_1(p_2)}{P_2'(p_2)} e^{p_2 t} = 3e^{-t} - 2{,}5e^{-1{,}5t} \quad .$$

Výsledek můžeme zkontrolovat např. tak, že zadaný zlomek vyjádříme jako součet

$$F(p) = \frac{1}{2}\frac{p}{(p+1)(p+1{,}5)} + 2\frac{1}{(p+1)(p+1{,}5)}$$

a provedeme inverzi podle řádků č.8 a 7 v tab.5.5-2. Heavisideův vzorec vede v daném případě k výsledku rychleji.

Má-li jmenovatel komplexní kořeny, jsou tyto kořeny vždy v komplexně sdružených dvojicích. Jejich imaginární části pak vedou ke vzniku harmonických funkcí ve výsledném časovém průběhu, reálné části působí exponenciální útlum.

5.5.3.3 Numerická inverze Laplaceových obrazů

Pokud nám nejde o odvození analytického výrazu pro okamžitou hodnotu originálu a chceme pouze vypočítat vzorky *f(t)* ve zvolených okamžicích t_1, t_2, ...,můžeme pro dané konkrétní hodnoty parametrů obvodu použít vhodného numerického postupu. Poměrně výpočtově jednoduchý je postup podle vzorce

$$f(t) \doteq \frac{2}{t}\,\mathrm{Re}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}_i \mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{a}_i}{t}\right)\right], \tag{5.5-6}$$

kde $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ jsou komplexní konstanty.

Algoritmus je popsán v lit. [3], nebo [4] . V uvedených publikacích jsou rovněž uvedeny hodnoty konstant $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$, pro $i = 1,2,\ldots,5$. Invertovaná funkce *f(t)* je pak aproximována polynomem 19. stupně, přičemž počáteční a konečná hodnota funkce je vyhodnocena přesně.

Algoritmus předpokládá, že počítáme vzorky obrazu *F(p)* jako komplexní čísla v bodech $\mathbf{a}_i / t$, násobíme komplexními konstantami $\mathbf{b}_i$, sečteme reálné části součinů a výsledek násobíme *2/t.*

Příklad 5.5-10

Řešíme opět příklad 5.5-9 a kontrolujeme numerické hodnoty *f(t)* pro *t* v intervalu 0 až 10 μs. Výsledky jsou v tab.5.5-3.

Tabulka 5.5-3 Srovnání hodnot originálu z příkladů 5.5-10 (přesné hodnoty) a 5.5-11 (numerická inverze)

t[μs]	Přesná hodnota (př.5.5-9)	Numer. inverze (př.5.5-11)
0	0,500000	0,500000
1	0,545813	0,545813
2	0,281538	0,281538
3	0,121589	0,121589
4	0,048750	0,048750
5	0,018831	0,018831
6	0,007128	0,007128
7	0,002668	0,002667
8	0,000991	0,000992
9	0,000367	0,000370
10	0,000135	0,000143

Z výsledků je zřejmý dobrý souhlas hodnot získaných numerickou cestou a přímým dosazením do přesného analytického výrazu. Lze ukázat, že popsaná numerická metoda dává dobré výsledky při inverzi dostatečně rychle tlumených průběhů, avšak selhává např. po několika periodách u originálů typu netlumených harmonických funkcí (např. funkce z uvedeného příkladu 5.5-10). Pro inverzi náročnějších obrazů existují dokonalejší algoritmy, které však vyžadují větší počet matematických operací.

5.5.4 Operátorové charakteristiky obvodových prvků

Na začátku kapitoly o Laplaceově transformaci jsme uvedli, že při analýze přechodných dějů můžeme vycházet z diferenciálních rovnic obvodu, které v dalším kroku převedeme pomocí Laplaceovy transformace na rovnice nediferenciální, algebraické. Všimneme si nyní, jak transformujeme rovnice základních obvodových prvků.

Ve všech případech budeme používat zápisu

$$I(p) = L[i(t)], \quad U(p) = L[u(t)] \ .$$

Nejprve uvažujeme nulové počáteční podmínky.

Pro **rezistor** platí :

$$u(t) = R.i(t) \ \text{a tedy} \ U(p) = R.I(p),$$

$$i(t) = G.u(t) \quad \Rightarrow \quad I(p) = G.U(p). \tag{5.5-7}$$

Pro **kapacitor :**

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \ \Rightarrow \ U(p) = \frac{1}{pC}I(p),$$

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \ \Rightarrow \ I(p) = pCU(p). \tag{5.5-8}$$

Pro **induktor :**

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \ \Rightarrow \ U(p) = pLI(p),$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u(t)dt \ \Rightarrow \ I(p) = \frac{1}{pL}U(p). \tag{5.5-9}$$

Vztahy mezi obrazy svorkových napětí a proudů mají zřejmě tvar analogický vztahům, které jsme psali při analýze ustáleného harmonického stavu pomocí symbolické metody. Místo $j\omega$ píšeme však operátor p. Definujeme tak ***operátorové imitance*** (tj.*operátorovou impedanci Z(p)* a *admitanci Y(p)*) vztahy:

$$U(p) = Z(p).I(p), \quad I(p) = Y(p).U(p). \tag{5.5-10}$$

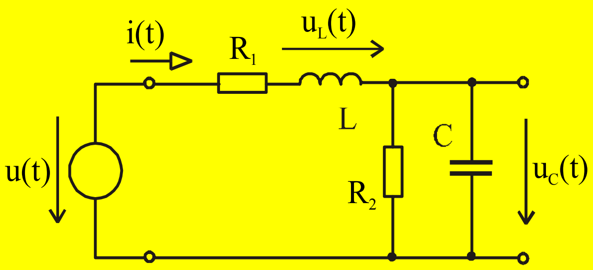
Z analogie k impedancím $\mathbf{Z}(j\omega)$ a admitancím $\mathbf{Y}(j\omega)$ snadno usoudíme, že platí i stejná pravidla pro výpočet impedancí při sériovém nebo paralelním řazení. Můžeme tedy definovat **operátorové impedance a admitance** i pro obvody libovolné složitosti.

Tak jako jsme pro harmonický ustálený stav definovali přenos jako podíl fázoru $F_2(j\omega)$ výstupní a fázoru $F_1(j\omega)$ vstupní veličiny, definujeme analogicky tzv. ***operátorový přenos*** jako

$$K(p) = \frac{F_2(p)}{F_1(p)} \ ,$$

kde $F_2(p)$ a $F_1(p)$ jsou příslušné obrazy.

Příklad 5.5-11



Hledáme vztahy mezi obrazy veličin $u(t), i(t), u_L(t)$ a $u_C(t)$ v obvodu na obr.5.5-7. Počáteční podmínky v obvodu jsou nulové.

Pro obraz *I(p)* vstupního proudu *i(t)* platí

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} \ .$$

Obrázek 5.5.7 Obvod k příkladu 5.5-11

Z(p) je celková operátorová impedance obvodu, kterou můžeme vyjádřit pomocí operátorových impedancí jednotlivých prvků :

$$Z(p) = R_1 + pL + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = R_1 + pL + \frac{R_2}{1 + pR_2C} \ .$$

Pak pro obrazy napětí na cívce a na kondenzátoru platí

$$U_L(p) = pL.I(p), \quad U_C(p) = \frac{R_2}{1 + pR_2C} I(p) \ .$$

Operátorový přenos napětí

$$K_u(p) = \frac{U_C(p)}{U(p)} = \frac{\frac{R_2}{1 + pR_2C}}{R_1 + pL + \frac{R_2}{1 + pR_2C}} = \frac{1}{p^2LC + p(R_1C + \frac{L}{R_2}) + 1 + \frac{R_1}{R_2}} \ .$$

Jsou-li tedy v obvodu nulové počáteční podmínky, můžeme pro analýzu poměrů v obvodu použít všechny metody, které známe pro řešení harmonického ustáleného stavu, pouze místo $j\omega$ píšeme operátor p a místo symbolů pro fázory $F(j\omega)$ používáme obrazů *F(p)*.Pokud nejsou počáteční podmínky nulové, situace je o něco komplikovanější. Pro napětí na kondenzátoru platí

$$u(t) = u(0_+) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \ ,$$

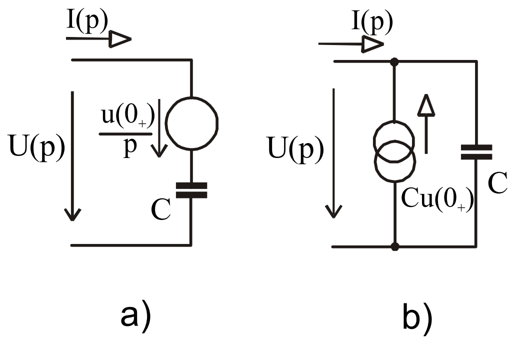
takže po transformaci máme

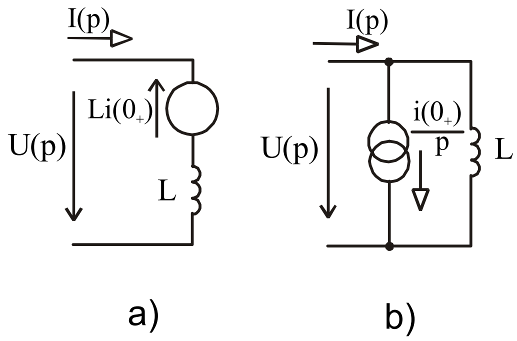
$$U(p) = \frac{u(0_+)}{p} + \frac{1}{pC} I(p) \ . \qquad (5.5\text{-}11)$$

Na základě této rovnice můžeme vytvořit náhradní zapojení obsahující kapacitor s nulovým počátečním napětím a s impedancí *1/pC* v sérii se zdrojem konstantního napětí (napěťovým skokem) $u(0_+)/p$. Schéma je na obr.5.5-8a. Jiné náhradní zapojení, nakreslené na obr.5.5-8b, vyplývá z rovnice pro proud

$$I(p) = pCU(p) - Cu(0_+)\,. \tag{5.5-12}$$

Schéma obsahuje kondenzátor s nulovým počátečním napětím paralelně se zdrojem impulsu náboje $Cu(0_+)$.





Obrázek 5.5.8 Náhr. schémata kapacitoru s počátečním napětím $u(0_+)$

Obrázek 5.5.9 Náhr. schémata induktoru s počátečním proudem $i(0_+)$

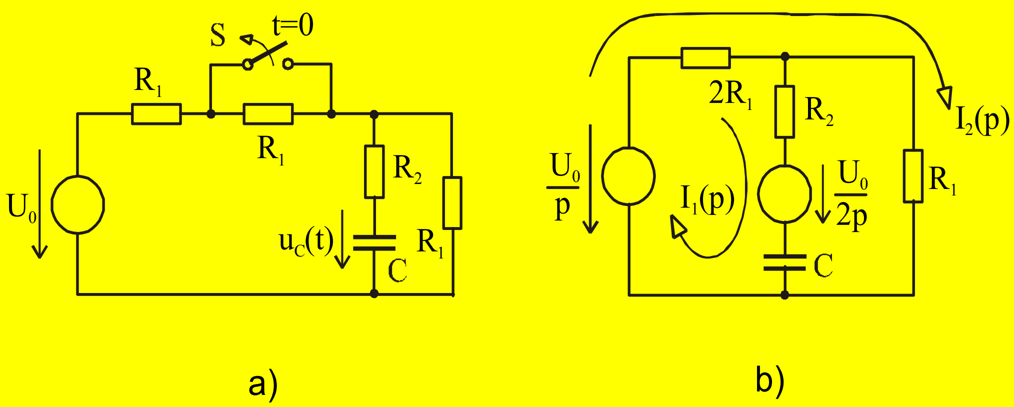
Analogická náhradní schémata induktoru s nenulovým počátečním proudem jsou nakreslena na obr.5.5-9. Vyplývají z operátorových vztahů

$$U(p) = pLI(p) - Li(0_+) \quad \text{a} \quad I(p) = \frac{1}{pL}U(p) + \frac{i(0_+)}{p}\,. \tag{5.5-13}$$

Příklad 5.5-12

Uvažujeme obvod na obr.5.5-10a. Obvod je napájen ze zdroje stejnosměrného napětí U_0. Spínač *S* byl sepnut dostatečně dlouho, takže se v obvodu ustálily poměry a odezněly přechodné jevy. V čase *t=0*, který zvolíme za počátek analýzy, je spínač rozepnut. Vyšetřujeme děje, které byly touto změnou v obvodu vyvolány.

Zajímáme se především o napětí na kondenzátoru $u_C(t)$. Těsně před rozepnutím spínače



Obrázek 5.5.10 K příkladu 5.5-12 : a) základní schéma, b) náhradní schéma pro řešení přechodného děje v *t>0*

tekl ze zdroje stejnosměrný proud dvěma sériově spojenými rezistory R_1. Napětí na kondenzátoru bylo rovno úbytku na druhém z těchto rezistorů, tj. $U_0/2$. Toto napětí pak představuje počáteční napětí pro přechodný děj $u_C(0_+)$. Pro řešení děje sestavíme operátorové schéma podle obr.5.5-10b. V sérii se zdrojem napětí U_0 je odpor $2R_1$, v sérii s kondenzátorem je zdroj počátečního napětí $U_0/2$.

Obvod řešíme např. metodou smyčkových proudů a počítáme proudy $I_1(p)$ a $I_2(p)$.

$$\begin{bmatrix} 2R_1 + R_2 + \dfrac{1}{pC} & 2R_1 \\ 2R_1 & 3R_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{U_0}{2p} \\ \dfrac{U_0}{p} \end{bmatrix} .$$

Obraz proudu $I_1(p)$ je pak

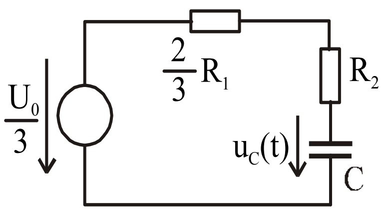
$$I_1(p) = \frac{\frac{3}{2}R_1 - 2R_1}{2R_1^2 + 3R_1R_2 + \frac{3R_1}{pC}} \frac{U_0}{p} = -\frac{U_0C}{6\tau}\frac{1}{p+\frac{1}{\tau}} \qquad \text{, kde } \tau = C(\tfrac{2}{3}R_1 + R_2) .$$

Časový průběh $\quad i_1(t) = -\dfrac{U_0C}{6\tau}e^{-t/\tau}$,

napětí na kondenzátoru

$$u_C(t) = \frac{U_0}{2} + \frac{1}{C}\int_0^t i_1(t)dt = \frac{U_0}{3}(1 + \frac{1}{2}e^{-t/\tau}) \ .$$

Úlohu jsme mohli také řešit jednoduchou úvahou. Počínaje okamžikem rozepnutí spínače platí jednoduché schéma na obr.5.5-11, získané ze schématu na obr.5.5-10b náhradou zdroje napětí U_0 a odporového děliče, složeného ze tří odporů R_1, ekvivalentním zdrojem s napětím $U_0/3$ a vnitřním odporem $R_1 // 2R_1 = 2R_1/3$. Protože nyní máme jednoduchý sériový obvod *RC*, je průběh napětí na kondenzátoru dán exponenciální funkcí s časovou konstantou $\quad \tau = C(R_2 + \frac{2}{3}R_1)$.



Obrázek 5.5.11 Zjednodušení schématu použitím věty o náhradním zdroji

.

Napětí se vyrovnává z původní hodnoty $U_0/2$ na novou ustálenou hodnotu $U_0/3$, tj.

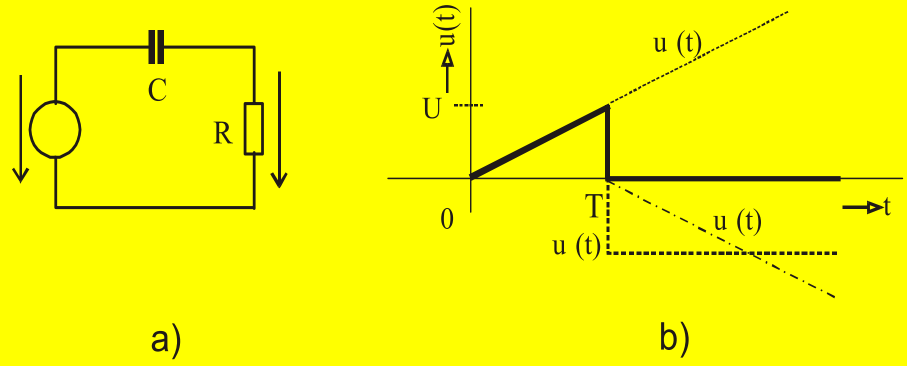
$$u_C(t) = \frac{U_0}{2} - (\frac{U_0}{2} - \frac{U_0}{3})(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{U_0}{3}(1 + \frac{1}{2}e^{-t/\tau}) \ .$$

Výsledek souhlasí s dříve získaným vztahem.

Příklad 5.5-13

Kondenzátor v obvodu na obr.5.5-12a byl na počátku vybit. Vyšetřujeme průběh napětí $u_R(t)$ na výstupu obvodu (na výstupních svorkách rezistoru) jako odezvu na vstupní signál podle obr.5.5-12b. Vstupní napětí *u(t)* je možno rozložit na součet tří průběhů:

$$u(t) = \frac{U}{T} t.\mathbf{1}(t) - \frac{U}{T}(t-T).\mathbf{1}(t-T) - U.\mathbf{1}(t-T) \ .$$



Obrázek 5.5.12 K příkladu 5.5-13

Proto $$U(p) = \frac{U}{Tp^2}[1-(1+pT)e^{-pT}].$$

Operátorový přenos obvodu

$$K_u(p) = \frac{U_R(p)}{U(p)} = \frac{R}{R+\frac{1}{pC}} = \frac{p}{p+\frac{1}{\tau}}, \quad \tau = RC \ .$$

Potom

$$u_R(p) = K_u(p).U(p) = \frac{U}{T}\frac{1}{p\,(p+\frac{1}{\tau})} - \frac{U}{T}\frac{1+pT}{p\,(p+\frac{1}{\tau})}e^{-pT} \ .$$

První část obrazu upravíme tak, abychom mohli použít položku č.6 v tab.5.5-2. Pak

$$L^{-1}[\frac{U}{T}\frac{1}{p(p+\frac{1}{\tau})}] = L^{-1}[U\frac{\tau}{T}\frac{\frac{1}{\tau}}{p(p+\frac{1}{\tau})}] = U\frac{\tau}{T}(1-e^{-t/\tau})$$

Podobně invertujeme i zbytek a dostaneme zpožděný průběh

$$L^{-1}[\frac{U}{T}\frac{1+pT}{p(p+\frac{1}{\tau})}e^{-pT}] = L^{-1}[U\frac{\tau}{T}\frac{\frac{1}{\tau}}{p(p+\frac{1}{\tau})}e^{-pT} + \frac{U}{p+\frac{1}{\tau}}.e^{-pT}] =$$

$$= [U\frac{\tau}{T}(1-e^{-(t-T)/\tau}) + Ue^{-(t-T)/\tau}],\quad t \geq T$$

Výsledný průběh je tedy dán vztahy

$$u_R(t) = U\frac{\tau}{T}(1-e^{-t/\tau}),\quad 0 \leq t \leq T\ ,$$

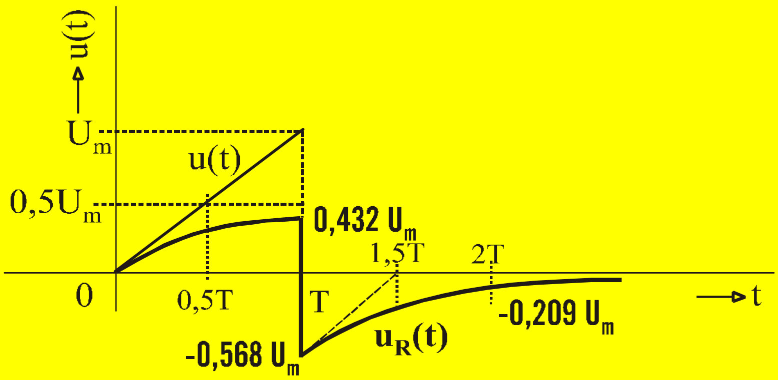
$$u_R(t) = U\frac{\tau}{T}(1-e^{-t/\tau}) - U\frac{\tau}{T}(1-e^{-(t-T)/\tau}) - Ue^{-(t-T)/\tau} =$$

$$= [U\frac{\tau}{T}(1-e^{-t/\tau}) - U]e^{-(t-T)/\tau},\quad t \geq T$$

Na konci pulsu v čase $t=T$ dosahuje napětí na rezistoru hodnoty

$$U\frac{\tau}{T}(1-e^{-T/\tau})\ .$$

Pak se skokem sníží o U stejně jako napětí na vstupu a exponenciálně klesá k nule s časovou konstantou τ.



Obrázek 5.5.13 Vypočítaný průběh napětí na rezistoru pro *τ=0,5T*

5.5.5 Řešení periodického ustáleného stavu operátorovou metodou

Hledáme analytický výraz pro odezvu obvodu na periodický neharmonický signál. Nejprve odvodíme obecný tvar obrazu periodicky se opakující funkce času. Předpokládáme samozřejmě, že pro $t<0$ bylo $f(t)=0$. V intervalu první periody, tj. $0 \leq t \leq T$ označíme průběh jako $f_1(t)$. Příslušný obraz bude pak $F_1(p)$.

Průběh $f_2(t)$ ve druhé periodě se shoduje s průběhem v první periodě, je však zpožděn o T. Proto

$$f_2(t) = f_1(t-T).\mathbf{1}(t-T)\quad \text{a}\quad F_2(p) = F_1(p).e^{-pT}\ .$$

Podobně

$$f_3(t) = f_1(t-2T).\mathbf{1}(t-2T) \quad \text{a} \quad F_3(p) = F_1(p).e^{-p2T} \quad \text{atd.}$$

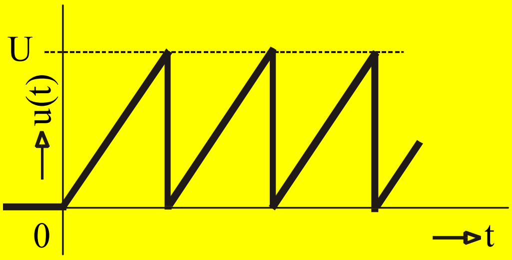
Obraz celého průběhu je tedy

$$F(p) = F_1(p).(1+e^{-pT}+e^{-2pT}+e^{-3pT}+...) = \frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}} , \qquad (5.5\text{-}14)$$

protože výraz v závorce je součet nekonečné geometrické řady s kvocientem e^{-pT} .

Příklad 5.5-14

Odvoďte výraz pro obraz periodického pilovitého průběhu na obr.5.5-14.



Obrázek 5.5.14 Periodický pilovitý průběh k příkladu 5.5-14

Obraz průběhu v první periodě jsme již odvodili v příkladu 5.5-13. Proto

$$F(p) = \frac{U}{Tp^2}[1-(1+pT)e^{-pT}]\frac{1}{1-e^{-pT}} = \frac{U}{Tp^2} - \frac{U}{p}\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}} . \qquad (5.5\text{-}15)$$

Upravený výsledek ukazuje, že pilovitý průběh podle obr.5.5-14 můžeme také pokládat za rozdíl lineárního neomezeného průběhu (rampové funkce)

$$\frac{U}{T}t.\mathbf{1}(t)$$

a schodovitého průběhu, složeného ze skokových změn o velikosti U, následujících v okamžicích $T, 2T, 3T, ...$

Příklad 5.5-15

Určete ustálenou periodickou odezvu *RC* obvodu na obr.5.5-12a na pilovitý průběh z příkladu 5.5-14.

Obraz napětí na rezistoru $u_R(t)$ je (výraz pro přenos $K_u(p)$ jsme již odvodili v příkladu 5.5-12)

$$U_R(p) = K_u(p).U(p) = U\frac{\tau}{T}\frac{\frac{1}{\tau}}{p(p+\frac{1}{\tau})} - U\frac{e^{-pT}}{(p+\frac{1}{\tau})(1-e^{-pT})} .$$

Časový průběh $u_R(t)$ získáme zpětnou transformací. Originál k prvnímu členu získáme snadno:

$$u\frac{\tau}{T}(1-e^{-t/\tau}).\mathbf{1}(t) \ . \qquad (5.5\text{-}16)$$

Druhý člen nejprve upravíme:

$$-\frac{U}{p+\frac{1}{\tau}}e^{-pT}(1+e^{-pT}+e^{-2pT}+...)$$

a invertujeme

$$-U[e^{-(t-T)/\tau}.\mathbf{1}(t-T)+e^{-(t-2T)/\tau}.\mathbf{1}(t-2T)...] \ . \qquad (5.5\text{-}17)$$

Odezva $u_R(t)$ je v každém intervalu jiná. Nalezneme proto výraz, popisující $u_R(t)$ v intervalu $nT < t < (n+1)T$, tj. v *n+první* periodě. První část výsledku je tam dána výrazem (5.5-16), z druhé části (5.5-17) však vezmeme v úvahu jen prvních n členů, protože ostatní jsou dosud nulové, uplatní se až později.
V *n+první* periodě tedy platí

$$u_R(t)=U\frac{\tau}{T}(1-e^{-t/\tau})-Ue^{-t/\tau}(e^{T/\tau}+e^{2T/\tau}+...+e^{nT/\tau})=$$
$$=U\frac{\tau}{T}(1-e^{-t/\tau})-Ue^{-t/\tau}e^{T/\tau}\frac{e^{nT/\tau}-1}{e^{T/\tau}-1} \ .$$

Při úpravě jsme použili vzorec pro součet konečného počtu členů geometrické řady.

Průběh $u_R(t)$ se skládá ze dvou částí: z přechodné části, vyvolané skutečností, že až do okamžiku $t=0$ bylo vstupní napětí i napětí na kondenzátoru nulové a z periodického ustáleného děje, odpovídajícího průchodu periodického pilovitého signálu obvodem. Přechodná část výsledku zřejmě s rostoucím časem zanikne. Ustálený děj se naproti tomu opakuje naprosto shodně v každé periodě.

Oddělíme oba děje. Za tím účelem provedeme ještě některé úpravy výsledku:

$$u_R(t)=U\frac{\tau}{T}(1-e^{-t/\tau})-U\left[\frac{e^{-(t-nT)/\tau}.e^{T/\tau}}{e^{T/\tau}-1}+\frac{e^{-(t-T)/\tau}}{e^{T/\tau-1}}\right]=$$

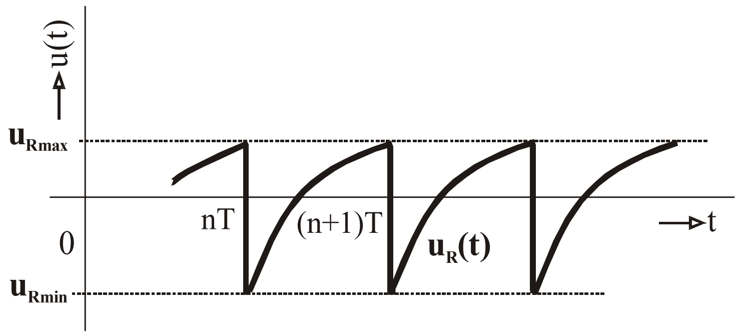
$$=U\frac{\tau}{T}-U\frac{e^{-(t-nT)/\tau}}{1-e^{-T/\tau}}-e^{-t/\tau}\left[\frac{\tau}{T}-\frac{1}{1-e^{-T/\tau}}\right], \quad nT < t < (n+1)T$$

První dva členy představují periodickou složku výstupního napětí. Proměnná veličina *t-nT* se totiž v každé periodě mění mezi nulou a délkou periody *T*. Poslední člen výsledku představuje pak přechodnou složku a s rostoucím časem klesá k nule.

Na obr.5.5-15 je nakreslen průběh periodické složky napětí $u_R(t)$. Pro extrémní hodnoty platí

$$U_{R\min}=U(\frac{\tau}{T}-\frac{1}{1-e^{-T/\tau}}), \quad U_{R\max}=U(\frac{\tau}{T}-\frac{e^{-T/\tau}}{1-e^{-T/\tau}}) \ .$$

Je-li např. $\tau=T/2$, kolísá napětí na rezistoru mezi *-0,6565 U* a *+0,3435 U.*



Obrázek 5.5.15 Periodická část odezvy

5.5.6 Shrnutí podkapitoly 5.5 :

Laplaceova transformace umožňuje velmi snadné řešení přechodných dějů v oblasti p. Laplaceovou transformací se převede řešení diferenciálních rovnic v časové oblasti na řešení obyčejných algebraických rovnic v oblasti p. Zpětnou Laplaceovou transformací z obrazové roviny p do časové oblasti t je možné provést pomocí slovníku jednoduchých výrazů, rozkladem na parciální zlomky (Heavisideův vzorec) nebo numerickou metodou.

Za pomoci operátorových charakteristik jednotlivých obvodových prvků můžeme setavovat rovnice pro řešení přechodných dějů přímo z operátorových schémat. Laplaceova transformace umožňuje snadno řešit i obvody s počátečními nenulovými podmínkami, odezvy obvodů na periodické průběhy veličin a odezvy obvodů na signály s obecným tvarem časového průběhu.

5.5.7 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 5.5 :

Příklad 5.5-16

Výpočtem byl určen obraz výstupní veličiny F(p) ve tvaru :

a) $\dfrac{1}{p+a}$, b) $\dfrac{a}{p(p+a)}$, c) $\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$.

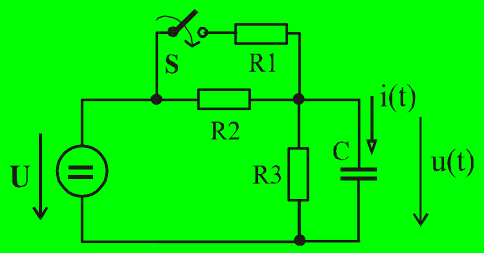
Určete originál funkce v časové oblasti f(t).

Příklad 5.5-17

Určete k uvedenému obrazu funkce F(p) originál f(t) pomocí Heavisideova vzorce.

$$F(p) = \frac{10^7}{p^2 + 2.10^5 p + 1{,}01.10^{12}}$$

Příklad 5.5-18



Obvod na obrázku byl před sepnutím spínače S v ustáleném stavu. Pomocí Laplaceovy transformace odvoďte časový průběh napětí a proudu kondenzátoru, vypočtěte jejich hodnoty v čase t = 5ms, t =10 ms a t =∞ pro $U = 20$ V, $R_1 = 2\ k\Omega$, $R_2 = 4\ k\Omega$, $R_3 = 6\ k\Omega$, $C= 10\mu F$.

5.6 Odezva obvodu na standardní vstupní signály

5.6.1 Přechodná a impulsová charakteristika

V předchozích částech (viz kap.3.8) jsme již ukázali, že komplexní přenos (např. $\mathbf{K}_u(j\omega)$) charakterizuje chování obvodu v kmitočtové oblasti a že průběh kmitočtové závislosti modulu $K_u(\omega)$ a argumentu $\varphi(\omega)$ určuje, jaký vliv má obvod na procházející signál v ustáleném harmonickém nebo periodickém stavu. Z komplexního tvaru přenosu snadno přejdeme k operátorovému přenosu $K_u(p)$ tak, že všude místo $j\omega$ píšeme p. Operátorový přenos nám pak umožní vyšetřovat odezvu obvodu i na jiné, obecnější tvary signálu, a charakterizovat tak chování obvodu v časové oblasti. Za tím účelem je vhodné definovat jednoduchý ***standardní vstupní signál*** a obvod charakterizovat odezvou na tento signál. Takovým signálem je např. ***jednotkový skok***, nakreslený na obr.5.6-1a:

$$\mathbf{1}(t) = \langle \begin{matrix} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{matrix} .$$

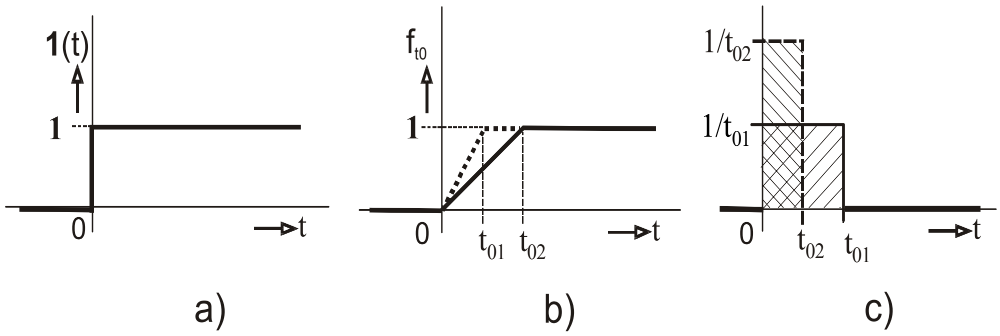
Odezvě obvodu na jednotkový skok říkáme ***přechodná charakteristika*** a značíme ji ***h(t).***

Jednotkový skok můžeme pokládat za limitní případ signálu $f_{t0}(t)$, zobrazeného na obr.5.6-1b, u něhož přechod mezi nulovou a jednotkovou úrovní trvá konečnou dobu t_0. Platí zřejmě

$$\mathbf{1}(t) = \lim_{t_0 \to 0} f_{t0}(t) \ .$$

Derivujeme-li signál $f_{t0}(t)$ podle času, dostaneme obdélníkový impuls

$$\frac{d}{dt} f_{t0}(t) = \begin{matrix} 0 & t<0 \\ 1/t_0\,, & 0<t<t_0 \\ 0 & t>t_0 \end{matrix}$$



Obrázek 5.6.1 Základní vstupní signály : a) jednotkový skok, b) a c) k definici jednotkového impulsu

s amplitudou $1/t_0$ a délkou t_0. Časový průběh této derivace je zobrazen na obr.5.6-1c pro dvě různé hodnoty t_0. Je zřejmé, že čím je impuls kratší, tím větší má amplitudu, ale jeho plocha (tzv. mohutnost impulsu) je stále rovna jedné.

V limitním případě pro $t_0 \to 0$ docházíme k tzv. ***jednotkovému (Diracovu) impulsu*** $\delta(t)$**:**

$$\delta(t) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{d}{dt} f_{t0}(t) = \frac{d}{dt} \lim_{t_0 \to 0} f_{t0}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{1}(t) \ , \qquad (5.6\text{-}1)$$

který rovněž slouží jako standardní vstupní signál. Odezva obvodu na jednotkový impuls se nazývá ***impulsová charakteristika*** **(*impulsová odezva, váhová funkce*)** a značí se jako ***g(t)*.**

S ohledem na (5.6-1) platí zřejmě mezi přechodnou a impulsovou charakteristikou obvodu vztahy

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t), \quad h(t) = h(0_+) + \int_0^t g(t)dt \ . \qquad (5.6\text{-}2)$$

V praxi nelze ovšem jednotkový impuls realizovat. Přesto však má definice impulsové odezvy velký význam, jak ještě ukážeme.

Laplaceův obraz jednotkového skoku je

$$L[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{p} \ , \qquad (5.6\text{-}3)$$

obraz jednotkového impulsu

$$L[\delta(t)] = 1 \ . \qquad (5.6\text{-}4)$$

Proto přechodnou charakteristiku vypočítáme jako

$$h(t) = L^{-1}[H(p)] = L^{-1}[\frac{1}{p} K(p)] \qquad (5.6\text{-}5)$$

a impulsovou odezvu přímo jako originál, příslušející operátorovému přenosu

$$g(t) = L^{-1}[K(p)] \ . \qquad (5.6\text{-}6)$$

Všimneme si nyní přechodné charakteristiky poněkud podrobněji. Experimentálně ji naměříme tak, že na vstup obvodu (s nulovými počátečními podmínkami) připojíme v *t=0* stejnosměrné napětí jednotkové velikosti (protože však předpokládáme linearitu obvodu, nezáleží na skutečné velikosti připojeného napětí - odezva bude přímo úměrná velikosti skoku na vstupu). Počáteční hodnota přechodné charakteristiky bude

$$h(0) = \lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{p\to\infty} pH(p) = \lim_{p\to\infty} K(p)\,. \tag{5.6-7}$$

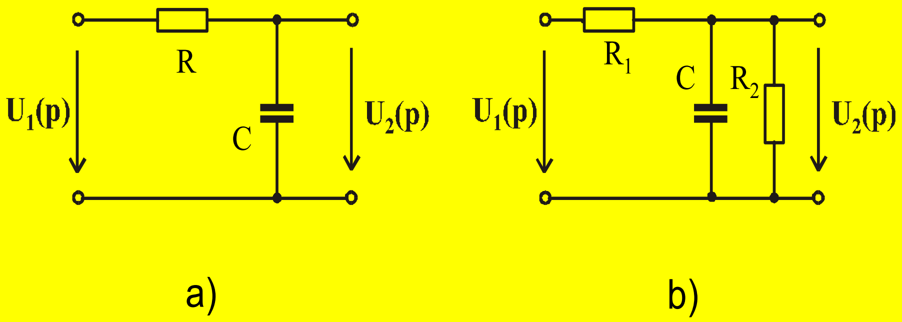
Závisí tedy na tom, jak velkou hodnotu má přenos $\mathbf{K}(j\omega)$ pro $\omega\to\infty$. U praktických neidealizovaných obvodů, jejichž přenos s rostoucím kmitočtem limituje k nule, bývá proto $h(0_+) = 0$. Na druhé straně ustálená úroveň výstupního signálu

$$h(\infty) = \lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{p\to 0} K(p) \tag{5.6-8}$$

závisí na přenosu obvodu pro ω=0, tj. pro stejnosměrný vstupní signál.

Příklad 5.6-1

Vypočítejte přechodnou charakteristiku integračního obvodu, jehož schéma je na obr.5.6-2a.



Obrázek 5.6.2 Integrační obvody *RC*

Pro přenos napětí obvodu platí

$$K_u(p) = \frac{1}{1+pRC} = \frac{\frac{1}{\tau}}{p+\frac{1}{\tau}}, \quad \tau = RC\ .$$

Proto

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p}\frac{\frac{1}{\tau}}{p+\frac{1}{\tau}}\right] = 1 - e^{-t/\tau}\ .$$

Zřejmě $h(0_+) = 0$, $h(\infty) = 1$. Pro impulsovou charakteristiku odvodíme

$$g(t) = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{\tau}}{p+\frac{1}{\tau}}\right] = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \ .$$

Příklad 5.6-2

Přechodnou charakteristiku obvodu na obr.5.6-2b vypočítáme na základě přenosu

$$K_u(p) = \frac{\frac{R_2}{1+pR_2C}}{R_1+\frac{R_2}{1+pR_2C}} = \frac{R_2}{R_1+R_2+pR_1R_2C} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{\frac{1}{\tau}}{p+\frac{1}{\tau}} \ ,$$

$$\tau = C\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \ .$$

Proto

$$h(t) = L^{-1}[\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{\frac{1}{\tau}}{p(p+\frac{1}{\tau})}] = \frac{R_2}{R_1+R_2}(1-e^{-t/\tau}) \ .$$

Počáteční hodnota $h(0)=0$ jako v minulém příkladu. Ustálená (konečná) hodnota $h(\infty)$ je však rovna přenosu děliče složeného z rezistorů R_1 a R_2, tj.

$$h(\infty) = \frac{R_2}{R_1+R_2} \ .$$

Příklad 5.6-3

Vypočítejte přechodnou charakteristiku přemostěného článku *T*, jehož schéma je na obr.5.6-3a.

Pro přenos odvodíme

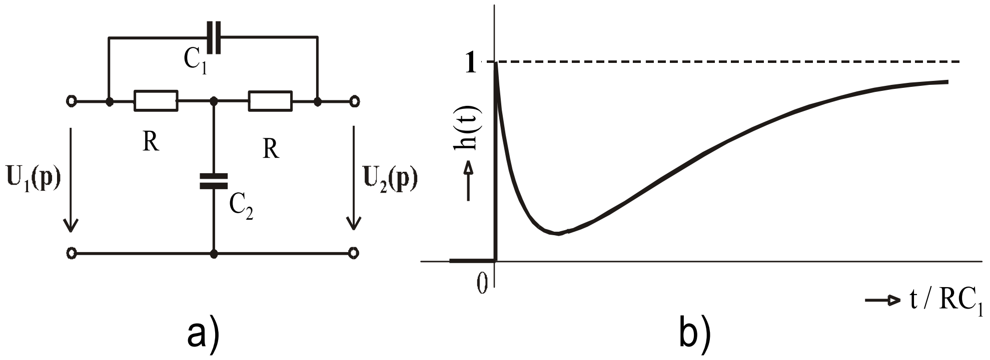
$$K_u(p) = \frac{p^2+\frac{2}{a}\frac{1}{RC_1}p+\frac{1}{aR^2C_1^2}}{p^2+\frac{a+2}{a}\frac{1}{RC_1}p+\frac{1}{aR^2C_1^2}} = 1-\frac{\frac{1}{RC_1}p}{p^2+\frac{a+2}{a}\frac{1}{RC_1}p+\frac{1}{aR^2C_1^2}} \ ,$$

kde $a = C_2/C_1$.

Póly přenosu jsou $\quad p_{1,2} = -\frac{a+2}{2a}\frac{1}{RC_1} \pm \frac{\sqrt{a^2+4}}{2a}\frac{1}{RC_1}$.

Pro přechodnou charakteristiku proto máme

$$h(t) = L^{-1}[\frac{1}{p} - \frac{\frac{1}{RC_1}}{(p-p_1)(p-p_2)}] = 1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2+4}} e^{-\frac{a+2}{2a}\frac{t}{RC_1}} \sinh(\frac{\sqrt{a^2+4}}{2a}\frac{t}{RC_1}) .$$



Obrázek 5.6.3 Přemostěný článek T : a) schéma, b) přechodná charakteristika pro *a=20*

Přenos má jednotkovou hodnotu pro *p=0* i pro $p \to \infty$. Proto $h(0_+) = h(\infty) = 1$.
Průběh přechodné charakteristiky pro případ *a=20* je nakreslen na obr.5.6-3b.

5.6.2. Stabilita lineárního obvodu

Ukázali jsme již, že impulsová odezva obvodu je dána inverzní transformací přenosu, tj.

$$g(t) = L^{-1}[K(p)] \ . \tag{5.6-9}$$

Přenos *K(p)* má tvar racionálního zlomku

$$K(p) = \frac{Q_m(p)}{P_n(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} = \quad . \tag{5.6-10}$$

$$= \frac{b_m}{a_n}\frac{(p-z_1)(p-z_2)...(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)}, \quad m \le n$$

V tomto vztahu jsou $z_1, z_2,...z_m$ ***nulové body*** a $p_1, p_2,...p_n$ ***póly přenosu***. Nulové body i póly jsou obecně komplexní čísla $\sigma + j\omega$ s reálnou částí σ a imaginární částí ω.
Pro výpočet časového průběhu *g(t)* můžeme použít např. příslušného Heavisideova vzorce (5.5-4). Pak

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_m(p_i)}{P_n'(p_i)} e^{p_i t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_m(p_i)}{P_n'(p_i)} e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} \tag{5.6-11}$$

kde A_i je konstanta nezávislá na čase.
Impulsová odezva obvodu je tedy obecně dána superpozicí harmonických průběhů s kmitočtem ω_i a s amplitudou, která se v čase mění exponenciálně a je úměrná $e^{\sigma_i t}$.

Očekáváme zřejmě, že s rostoucím časem přechodné děje v obvodu zaniknou. O obvodu s těmito vlastnostmi říkáme, že je ***stabilní***. Nutnou podmínkou pro to je , aby

$$\sigma_i < 0 \ , \tag{5.6-12}$$

tj. aby *reálné části všech pólů přenosu byly záporné* resp. aby *všechny póly přenosu ležely **v levé polovině** roviny komplexních čísel p*.

V případě, že i jen jediný pól má kladnou reálnou část, impulsová odezva (a samozřejmě odezva na jakýkoli jiný vstupní signál) roste s časem nade všechny meze a *obvod je **nestabilní.***

V případě, že $\sigma_i = 0$ (tj. jednoduchý pól leží na imaginární ose), jde o *obvod **na mezi stability.***

Vyšetřujeme-li stabilitu či nestabilitu obvodu, stačí zřejmě zjistit, zda některý pól nemá kladnou reálnou část. U složitějších obvodů se stupněm jmenovatele vyšším než dva nebo tři bývá obtížné vypočítat hodnoty všech pólů. To však není zapotřebí, protože existují jednodušší způsoby, jak zjistit, ve které časti komplexní roviny póly leží. Postupům, které to umožňují, se říká ***kritéria stability***.

5.6.2 Shrnutí podkapitoly 5.6:

Odezvy obvodů na jednotkový skok (přechodná charakteristika h(t)) a na jednotkový impuls (impulsová charakteristika g(t)) popisují výstižně chování obvodů v časové oblasti. Za pomoci známého obrazu přenosu napětí K(p) můžeme snadno určit odezvu obvodu h(t) a g(t) pomocí zpětné Laplaceovy transformace :

$$h(t)= L^{-1} [K(p)/p] \ , \ g(t) = L^{-1}[(K(p)].$$

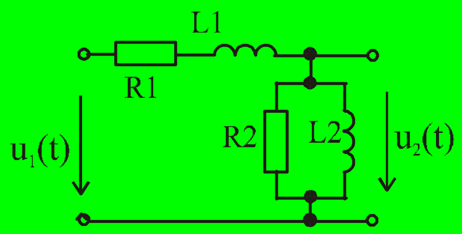
Z obecného vztahu pro impulsovou odezvu obvodu

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_m(p_i)}{P_n'(p_i)} e^{p_i t} = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}$$

vyplývá také mj. podmínka stability systému – všechny póly jeho přenosu musí ležet v levé polorovině roviny komplexních čísel (pro stabilní systém musí přechodné děje postupně zaniknout, to znamená $\sigma_i \langle \ 0$).

5.6.3 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 5.6

Příklad 5.6-3



Pro obvod na obrázku:
a) odvoďte výraz pro činitele přenosu napětí
$K_u(p) = U_2(p)/ U_1(p)$,
b) Vypočtěte průběh přechodné charakteristiky h(t) ,
c) Najděte mezní hodnoty h(t) pro t = 0 a t =∞
jsou –li prvky obvodu :
R_1= 1000 Ω, R_2= 4000 Ω , L1 =1H, L_2 = 2 H .

5.7 Výpočet odezvy obvodu na vstupní signál obecného tvaru

5.7.1 Duhamelův (konvoluční) integrál

Uvažujme lineární obvod popsaný operátorovým přenosem *K(p)*, na jehož vstupu působí signál $f_1(t)$. Hledáme odezvu obvodu $f_2(t)$. Pro obraz $F_2(p)$ signálu na výstupu zřejmě platí

$$F_2(p) = F_1(p).K(p) \ , \qquad (5.7\text{-}1)$$

kde $F_1(p) = L[f_1(t)]$ je obraz vstupního signálu. Protože obraz výstupního signálu je roven součinu obrazů $F_1(p)$ a $K(p)$, je časový průběh $f_2(t)$ dán konvolucí časového průběhu signálu na vstupu $f_1(t)$ a originálu ke *K(p)* , což je impulsová odezva

$$g(t) = \frac{d}{dt}h(t)$$

(podle řádku 11 v tab.5.5-1). Proto

$$f_2(t) = \int_0^t g(\alpha) f_1(t-\alpha)d\alpha \qquad (5.7\text{-}2)$$

resp. ($F_1(p)$ a $K(p)$ můžeme v součinu vzájemně zaměnit)

$$f_2(t) = \int_0^t g(t-\alpha) f_1(\alpha)d\alpha \ . \qquad (5.7\text{-}3)$$

Protože dále můžeme impulsovou odezvou *g(t)* vyjádřit jako derivaci přechodné charakteristiky podle času $g(t) = \frac{d}{dt}h(t)$, platí

$$f_2(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t h(\alpha) f_1(t-\alpha)d\alpha = \frac{d}{dt}\int_0^t h(t-\alpha) f_1(\alpha)d\alpha \ . \qquad (5.7\text{-}4)$$

Protože jde o derivaci integrálu podle parametru (horní meze) *t*, máme konečně

$$f_2(t) = h(0_+)f_1(t) + \int_0^t h'(\alpha)f_1(t-\alpha)d\alpha = \tag{5.7-5}$$

$$= h(t)f_1(0_+) + \int_0^t h(\alpha)f_1'(t-\alpha)d\alpha = \tag{5.7-6}$$

$$= h(0_+)f_1(t) + \int_0^t h'(t-\alpha)f_1(\alpha)d\alpha = \tag{5.7-7}$$

$$= h(t)\,f_1\,(0_+) + \int_0^t h(t-\alpha)f_1'(\alpha)d\alpha \ . \tag{5.7-8}$$

Vztahy (5.7-2) až (5.7-8) jsou tzv. **konvoluční** neboli Duhamelovy integrály. Umožňují vypočítat časový průběh výstupního signálu $f_2(t)$ na základě znalosti časového průběhu signálu $f_1(t)$ na vstupu a impulsové nebo přechodné charakteristiky obvodu.

Příklad 5.7-1

Hledáme odezvu derivačního článku *RC* (schéma na obr.5.5-12) na vstupní signál (rampová funkce), který je určen vztahy:

$$u_1(t) = 0, \qquad t < 0,$$
$$u_1(t) = U\frac{t}{T}, \quad t > 0 \quad .$$

K řešení použijeme např. Duhamelův integrál ve tvaru (5.7-6)

$$u_2(t) = u_1(0_+)h(t) + \int_0^t u_1'(t-\alpha)h(\alpha)da \ .$$

Přechodná charakteristika derivačního článku je

$$h(t) = e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC \ .$$

Derivace vstupního napětí

$$u_1'(t-\alpha) = \frac{U}{T} \ .$$

Potom

$$u_2(t) = \int_0^t \frac{U}{T} e^{-\alpha/\tau} d\alpha = \frac{U}{T}\left|-\tau e^{-\alpha/\tau}\right|_0^t = U\frac{\tau}{T}(1-e^{-t/\tau}) \ .$$

Použijeme-li k výpočtu jiné formy Duhamelova integrálu, musíme obdržet stejný výsledek (postup výpočtu však může být případně složitější). Vyjdeme např. ze vztahu (5.7-5). Pak

$$h(0_+) = 1, \quad h'(\alpha) = -\frac{1}{\tau}e^{-\alpha/\tau}, \quad f_1(t-\alpha) = \frac{U}{T}(t-\alpha)$$

a

$$u_2(t) = \frac{U}{T}t - \frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-\alpha/\tau}\frac{U}{T}(t-\alpha)d\alpha = U\frac{t}{T} - \frac{U}{T\tau}t + \frac{U}{T\tau}\int_0^t \alpha e^{-\alpha/\tau}d\alpha =$$

$$= U\frac{t}{T} - \frac{U}{\tau}\frac{1}{T}\left|-\tau e^{-\alpha/\tau}\right|_0^t + \frac{U}{T\tau}\left|\tau e^{-\alpha/\tau}\left(-\frac{\alpha}{\tau}-1\right)\right|_0^t = U\frac{\tau}{T}(1-e^{-t/\tau}) \ .$$

Duhamelův integrál můžeme odvodit též na základě principu superpozice podle následující úvahy:

Na vstup přenosového článku přivedeme napětí $u_1(\alpha)$ podle obr.5.7-1, kde jako čas je uvažována proměnná α. Původní průběh vstupního napětí přibližně nahradíme součtem napěťových skoků, následujících po intervalech $\Delta\alpha$. Bude-li interval dostatečně krátký, bude chyba aproximace vstupního napětí malá a náhrada dostatečně přesná. Amplitudy skoků budou úměrné derivaci $du_1 / d\alpha$.

Označíme-li přechodnou charakteristiku obvodu *h(t)*, je odezva obvodu na počáteční skok vstupního napětí dána vztahem $u_1(0_+)h(t)$. Skok

$$\Delta u_1(\Delta\alpha) \doteq \left.\frac{du_1(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\Delta\alpha} . \ \Delta\alpha = u_1'(\Delta\alpha).\Delta\alpha$$

vyvolá další odezvu, která v čase *t* bude rovna

$$\Delta u_1(\Delta\alpha).h(t-\Delta\alpha) \ .$$

Následující skok

$$\Delta u_1(2\Delta\alpha) \doteq u_1'(2\Delta\alpha).\Delta\alpha$$

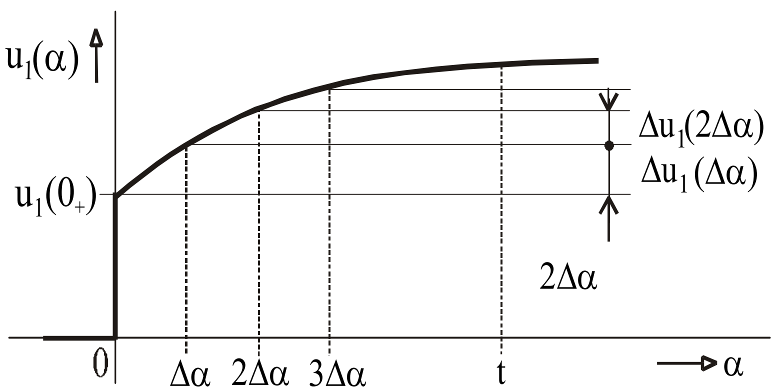
se projeví přídavnou odezvou

$$\Delta u_1(2\Delta\alpha).h(t-2\Delta\alpha)$$

atd.

Výsledný průběh $u_2(t)$ vyvolaný náhradní schodovitou vstupní funkcí je pak dán součtem odezev na skokové změny v ekvidistantních časových intervalech

$$u_2(t) = u_1(0_+).h(t) + \sum_{k=1}^{n} u_1'(k\Delta\alpha).h(t-k\Delta\alpha)\Delta\alpha \ .$$



Obrázek 5.7.1 K odvození Duhamelova integrálu na základě principu superpozice

V limitě pro $\Delta\alpha \to d\alpha$ přejde součin $k\Delta\alpha \to \alpha$, a suma v integrál v mezích od nuly do t. Potom

$$u_2(t) = u_1(0_+)h(t) + \int_0^t u_1'(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha \ ,$$

což je vzorec (5.7-8).

5.7.2 Odezva obvodu na velmi krátký impuls libovolného tvaru

Uvažujeme obvod, jehož přenos s rostoucím kmitočtem klesá k nule. Pak

$$h(0_+) = \lim_{t\to 0_+} h(t) = \lim_{p\to\infty} K(p) = 0 \,,$$

přechodná charakteristika obvodu vychází z počátku souřadnic a impulsová odezva *g(t)* je spojitá funkce času pro každé *t>0*.

Uvažujeme dále, že na vstup obvodu byl přiveden impuls, který je od nuly různý pouze v krátkém časovém intervalu *t=0* až T_i. Přitom čas T_i je tak krátký, že během této doby se impulsová odezva *g(t)* prakticky nezmění.

Odezva obvodu $f_2(t)$ je dána konvolučním integrálem např. ve tvaru (5.7-2)

$$f_2(t) = \int_0^t g(\alpha)f_1(\ t-\alpha)d\alpha \ . \qquad (5.7\text{-}9)$$

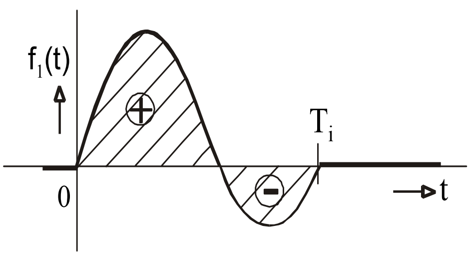
Součin za integrálem může být od nuly různý pouze tehdy, je-li $f_1(t-\alpha) \neq 0$. To je splněno, pohybuje-li se argument t-α funkce f_1 v intervalu $(0, T_i)$ a integrační proměnná α v intervalu $(t-T_i,\ t)$.

Můžeme tedy psát

$$f_2(t) = \int_{t-T_i}^{t} g(\alpha)f_1(t-\alpha)d\alpha \ . \qquad (5.7\text{-}10)$$

Protože však předpokládáme, že za dobu T_i se impulsová odezva *g(t)* prakticky nezmění, můžeme $g(\alpha)$ v integrálu pokládat za konstantní vzhledem k α a máme

$$f_2(t) \doteq g(t)\int_{t-T_i}^{t} f_1(t-\alpha)d\alpha = g(t)\int_0^{T_i} f_1(\alpha)d\alpha \ . \qquad (5.7\text{-}11)$$



Obrázek 5.7.2 Krátký impuls

Výsledek je velmi významný. Dokládá, že odezva obvodu na velmi krátký impuls má vždy (za uvedených podmínek) průběh impulsové odezvy *bez ohledu na konkrétní tvar signálu* na vstupu.

Její absolutní velikost je pak úměrná mohutnosti vstupního impulsu (ploše „pod impulsem“)

$$\int_0^{T_i} f_1(t)dt \,.$$

K praktickému určení impulsové odezvy obvodu tedy nepotřebujeme realizovat Diracův impuls (což není ostatně možné) a měření můžeme provádět celkem běžnými prostředky.

5.7.3 Shrnutí podkapitoly 5.7

Protože pro obraz $F_2(p)$ signálu na výstupu obvodu platí

$$F_2(p) = F_1(p).K(p) \ ,$$

můžeme vypočítat odezvu obvodu na vstupní signál $f_1(t)$ obecného tvaru , tzn.časový průběh $f_2(t)$ pomocí zpětné Laplaceovy transformace jako

$$f_2(t) = L^{-1}[F_1(p).K(p)] .$$

Časový průběh $f_2(t)$ je tedy určen konvolucí časového průběhu signálu na vstupu $f_1(t)$ a impulsové odezvy $g(t) = \frac{d}{dt}h(t)$, což je tedy

$$f_2(t) = \int_0^t g(\alpha) f_1(t-\alpha) d\alpha \ .$$

Po úpravě vztahu obdržíme čtyři tvary konvolučního (Duhamelova) integrálu. Ty umožňují vypočítat časový průběh výstupního signálu $f_2(t)$ na základě znalosti časového průběhu signálu $f_1(t)$ na vstupu a impulsové nebo přechodné charakteristiky obvodu.(Obecný tvar vstupního signálu $f_1(t)$ je vlastně nahrazován stupňovitou funkcí , výsledný průběh $f_2(t)$ vyvolaný náhradní schodovitou vstupní funkcí je pak dán součtem odezev na skokové změny v ekvidistantních časových intervalech).

Z tohoto integrálu mj. vyplývá též významná skutečnost, že obvody, pro které přenos s rostoucím kmitočtem klesá k nule, mají odezvu na velmi krátký impuls shodnou s průběhem impulsové odezvy *bez ohledu na konkrétní tvar impulsového signálu* na vstupu.

6 Přenosová vedení

Cíle kapitoly: Seznámit se základními vlastnostmi a použitím soustav s rozloženými parametry. Ukázat podstatný rozdíl a způsob popisu vedení jako elektrického obvodu. Ozřejmit základní poznatky o dějích na vedení v časové oblasti. Vysvětlit otázky šíření impulsů a vln po vedeních, osvětlit vznik odrazů a zkreslení tvaru vlny vlivem ztrát. V kmitočtové oblasti objasnit vlastnosti vedení zejména s ohledem na vlny na vedeni, vstupní impedanci vedení a vlivy nedokonalého impedančního přizpůsobení vedení na přenos.

Test předchozích znalostí:

Příklad 6 -1

a) Efektivní hodnota napětí je U=120 V, jaká je hodnota amplitudy U_m ?

b) Amplituda proudu je I_m =2,1 A, jaká je efektivní hodnota proudu I ?

Příklad 6 - 2

Vypočtěte x :

a) $x^2 + x - 6 = 0$, b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ c) $x^2 + 2.10^5 + 1{,}01.10^{12} = 0$

Příklad 6 - 3

Vypočtěte y :

a) $y = e^{0,3}$, b) $y = e^{-0,6}$, c) $y = e^{2,5}$

Příklad 6 - 4

Vypočtěte parciální derivace :

a) $\frac{\partial}{\partial t}\left[x^2 + t^2\right]$, b) $\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 + t^2\right]$, c) $\frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2 t + t^2\right]$, d) $\frac{\partial}{\partial t}\left[2x^2 t + t^2\right]$

Příklad 6 - 5

Načrtněte graf funkce :

a) $y = \mathrm{tg}\alpha$, b) $y = \mathrm{cotg}\alpha$, c) $-\mathrm{cotg}\alpha$

6.1 Úvod

V této kapitole se budeme zabývat tzv. přenosovými vedeními. Ta se používají k přenosu signálu na relativně veliké vzdálenosti, charakterizované tím, že doba šíření signálu z jednoho konce vedení na druhý je srovnatelná s dobou trvání signálu resp. s délkou jeho periody nebo délkou časového intervalu, kdy se signál podstatněji mění. U takových soustav již není možné identifikovat jednotlivé obvodové prvky jako rezistory, kondenzátory nebo cívky. Jde o ***soustavy s rozprostřenými parametry***. Na rozdíl od obvodů, které jsme dosud řešili a které byly popsány obyčejnými diferenciálními rovnicemi, musíme soustavy s rozprostřenými parametry popisovat ***parciálními diferenciálními rovnicemi***. V nich kromě času jako nezávisle proměnná vystupují i souřadnice v prostoru.

S vedeními se setkáváme v technické praxi velmi často. Jako příklady můžeme uvést např. dálková vedení pro přenos elektrické energie na vzdálenost řádově stovek nebo tisíců kilometrů. Doba šíření elektrické energie po těchto vedeních je pak srovnatelná s trváním periody přenášeného střídavého napětí a současně je podstatně delší než trvání přechodných dějů vyvolaných např. úderem blesku nebo zkratem na vedení.

Jiným příkladem může být napáječ spojující rádiový vysílač s vysílací anténou. Délka napáječe je srovnatelná s délkou vysílané elektromagnetické vlny, případně je i mnohonásobně větší. Napáječ je realizován jako soustava paralelních vodičů nebo jako koaxiální vedení, pro menší výkony jako koaxiální kabel.

Další typický systém tohoto druhu představují vodivé spoje mezi integrovanými obvody na desce moderního počítače, pracujícího s vysokým hodinovým kmitočtem. Trvání hran impulsů řádově v desetinách nanosekund je přibližně stejné jako doba šíření signálu z jednoho okraje desky na druhý.

Děje na vedeních budeme posuzovat jak v časové, tak i kmitočtové oblasti.

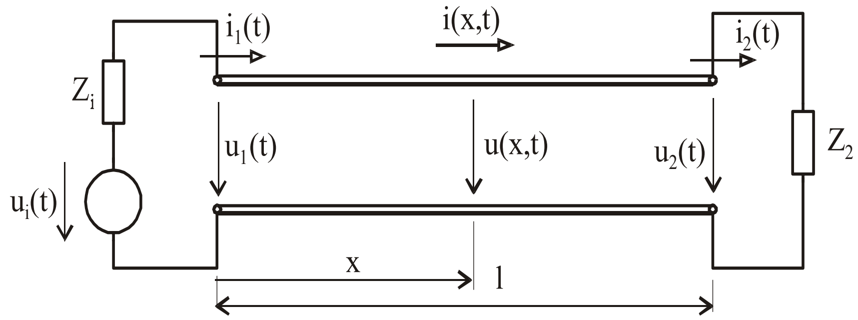
V časové oblasti nám půjde o otázky šíření vln (resp. impulsů) po vedeních, o odrazy na koncích vedení, zkreslení tvaru vlny vlivem ztrát, případně o přeslechy mezi blízkými vodiči.

V kmitočtové oblasti pak budeme posuzovat harmonický ustálený stav, délku vlny na vedení, vstupní impedanci vedení, vlivy nedokonalého impedančního přizpůsobení a tzv. stojaté vlny.

6.2 Základní rovnice vedení

Předpokládáme jednoduché vedení realizované jako jeden „živý“ vodič nad dokonale vodivou zemí. Schématicky je situace vyjádřena na obr.6.2-1. Na levé straně obrázku, kde obvykle budeme předpokládat existenci zdroje signálu, je tzv. *blízký konec*, na druhé straně tzv. *vzdálený konec* vedení. Budeme formulovat rovnice pro napětí a proud v libovolném místě na vedení. Jeho vzdálenost od blízkého konce označíme souřadnicí x. Okamžité hodnoty napětí a proudu jsou závislé nejen na čase t, ale také na souřadnici x. Budeme je psát jako $u(x,t)$ a $i(x,t)$. Hodnoty na blízkém konci, kde $x=0$, pak zkráceně označíme $u_1(t)$, $i_1(t)$ a na vzdáleném konci, kde $x=l$, jako $u_2(t)$, $i_2(t)$.

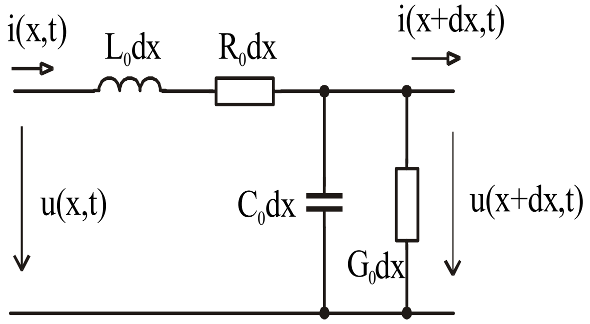
Nejprve vyjádříme poměry na elementárním úseku vedení délky dx. Uvážíme, že každý element vodiče má určitou kapacitu proti zemi a vlastní indukčnost. Hodnoty této kapacity a indukčnosti jsou úměrné délce úseku a tzv. **primárním parametrům** ideálního přenosového vedení, které vyhodnocujeme na jednotku délky a označíme jako C_0 [F/m] a L_0 [H/m].



Obrázek 6.2.1 Schématické znázornění dvojvodičového vedení

Dále obecně pozorujeme na vedení **ztráty elektrické energie** a ty přičítáme nenulovému podélnému odporu vodiče R_0 [Ω/m] a příčné svodové vodivosti G_0 [S/m].

Na obr.6.2-2. je **náhradní schéma elementárního úseku** vedení o délce *dx*. Teče-li proud zleva doprava, je zřejmě napětí v bodě *x+dx* menší než napětí v bodě *x* o úbytek na podélné indukčnosti a na odporu mezi oběma body. Podobně i proud *i* klesl o proud příčnou kapacitou



Obrázek 6.2.2 Náhradní schéma elementárního úseku vedení délky *dx*

a svodovou vodivostí. Matematicky tyto skutečnosti vyjádříme **dvojicí parciálních diferenciálních rovnic**

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_0 i(x,t) + L_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \tag{6.2-1a}$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G_0 u(x,t) + C_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \tag{6.2-1b}$$

V rovnicích vystupují dvě nezávisle proměnné a to čas *t* a souřadnice v prostoru (vzdálenost od blízkého konce vedení) *x*. K zápisu rovnic patří ještě počáteční podmínky

$$u(x,0),\ i(x,0)$$

(udávající rozložení napětí a proudu podél vedení v čase *t=0*) a okrajové podmínky

$$u(0,t) = u_1(t),\ u(l,t) = u_2(t),\ i(0,t) = i_1(t),\ i(l,t) = i_2(t)$$

(časové průběhy napětí a proudů na blízkém a vzdáleném konci vedení).

V obou rovnicích vystupují současně jak napětí *u(x,t)*, tak i proud *i(x,t)*. Rovnice lze upravit tak, aby každá obsahovala pouze jednu z těchto funkcí.

Derivujeme např. rovnici (6.2-1a) podle x a rovnici (6.2-1b) podle t.

$$-\frac{\partial^2 u(u,t)}{\partial x^2} = R_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + L_0 \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t \partial x} \ , \tag{6.2-2a}$$

$$-\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x \partial t} = G_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + C_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \ . \tag{6.2-2b}$$

Nyní do rovnice (6.2-2a) dosadíme za $\partial i(x,t)/\partial x$ z (6.2-1b) a za $\partial^2 i(x,t)/\partial x \partial t$ z (6.2-2b) a upravíme. Dostaneme tak parciální diferenciální rovnici 2. řádu pro *u(x,t)*:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (R_0 C_0 + L_0 G_0) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + R_0 G_0 u(x,t) \ . \tag{6.2-3a}$$

Analogickým postupem získáme podobnou diferenciální rovnici pro proud *i(x,t)*.

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} + (R_0 C_0 + L_0 G_0) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R_0 G_0 i(x,t) \ . \tag{6.2-3b}$$

Odvozené rovnice se nazývají **telegrafní rovnice**. Jejich název připomíná, že byly poprvé odvozeny a studovány koncem 19. století, kdy bylo třeba vysvětlit, proč při přenosu telegrafních značek na velké vzdálenosti dochází k jejich zkreslení, a něco proti tomu udělat.

Řešení parciálních rovnic (6.2-1a,b) usnadníme použitím Laplaceovy transformace z oblasti času do oblasti komplexní proměnné p. Příslušné obrazy označíme

$$U(x,p) = L[u(x,t)], \qquad I(x,p) = L[i(x,t)]. \tag{6.2- 4}$$

Transformované rovnice jsou obyčejné diferenciální rovnice s nezávisle proměnnou x. Za předpokladu nulových počátečních podmínek platí

$$-\frac{dU(x,p)}{dx} = (R_0 + pL_0) I(x,p) \ , \tag{6.2-5a}$$

$$-\frac{dI(x,p)}{dx} = (G_0 + pC_0) U(x,p) \ . \tag{6.2-5b}$$

Rovnice opět upravíme. První z nich derivujeme podle x a za derivaci *dI(x,p)/dx* dosadíme z druhé rovnice. Po úpravě dostaneme **telegrafní rovnici pro obraz napětí**

$$\frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} - (R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0) U(x,p) = 0 \ . \tag{6.2-6a}$$

Podobně pak získáme **telegrafní rovnici pro obraz proudu**

$$\frac{d^2 I(x,p)}{dx^2} - (R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0) I(x,p) = 0 \,. \tag{6.2-6b}$$

6.2.1 Shrnutí podkapitoly 6.2

V náhradním schématu elementárního úseku vedení vystupují v podélném směru **primární parametry vedení: $\mathbf{R_0}$** (podélný měrný odpor), **$\mathbf{L_0}$** (podélná měrná indukčnost), v příčném směru pak **$\mathbf{G_0}$** (příčná měrná vodivost), **$\mathbf{C_0}$** (příčná měrná kapacita), které jsou dány konstrukčním provedením vedení. Určují hlavní vlastnosti vedení, které můžeme popsat dvěma parciálními **rovnicemi vedení.**

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_0 i(x,t) + L_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \;, \qquad -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G_0 u(x,t) + C_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \;.$$

Ty ukazují, jak se mění rozložení napětí a proudu na vedení v závislosti na čase (t) po celé jeho délce (změna x).

V obou rovnicích vystupují současně jak napětí *u(x,t)*, tak i proud *i(x,t)*. Upravíme-li rovnice tak, aby jedna obsahovala pouze napětí *u(x,t) a* druhá proud *i(x,t)*, získáme parciální diferenciální rovnice druhého řádu nazývané **telegrafní rovnice**, jejichž řešení umožňuje analyzovat rozložení vln napětí a proudu podél vedení.

6.2.2 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 6.2

Příklad 6.2 –1

a) Nakreslete náhradní schéma elementu vedení o délce dx.

b) Odvoďte z uvedených rovnic vedení telegrafní rovnice.

6.3 Řešení rovnic vedení v časové oblasti

6.3.1 Vlny na bezeztrátovém vedení

Nejprve budeme předpokládat ideální bezeztrátové vedení s $R_0=0$, $G_0=0$. Telegrafní rovnice se zjednoduší na

$$\frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} - p^2 L_0 C_0 U(x,p) = 0 \,, \tag{6.3-1}$$

tj.

$$\frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} - \frac{p^2}{v^2} U(x,p) = 0 \tag{6.3-2}$$

a podobně pro proud

$$\frac{d^2I(x,p)}{dx^2}-\frac{p^2}{v^2}I(x,p)=0\,, \tag{6.3-3}$$

Poslední dvě rovnice jsou tzv. **vlnové rovnice** známé z fyziky.
Veličina

$$v=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{6.3-4}$$

má význam (i rozměr) rychlosti šíření vlny napětí a proudu podél vedení. Tato rychlost závisí především na permitivitě ε a permeabilitě μ prostředí, obklopujícího vodiče. Pro vakuum je rovna rychlosti světla $c \doteq 300000\,km/s$, pro jiné prostředí je vždy nižší.

Nejprve řešíme rovnici pro napětí. Protože má na pravé straně nulu, jde o homogenní diferenciální rovnici. Je to rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, jejíž řešení předpokládáme jako vážený součet dvou exponenciálních funkcí s exponenty, které jsou kořeny charakteristické rovnice. V našem případě má ***charakteristická rovnice*** tvar

$$\gamma^2-\frac{p^2}{v^2}=0 \tag{6.3-5}$$

a její kořeny jsou

$$\gamma_{1,2}=\pm\frac{p}{v}\,, \tag{6.3-6}$$

kde

$$\gamma=\frac{p}{v}=p\sqrt{L_0C_0} \qquad \text{je tzv. } \textbf{činitel šíření}. \tag{6.3-7}$$

Proto

$$U(x,p)=U_{p1}(p)e^{-p\frac{x}{v}}+U_{r1}(p)e^{p\frac{x}{v}}=U_p(x,p)+U_r(x,p)\,. \tag{6.3-8}$$

Výraz pro proud odvodíme podle (6.2-5a)

$$\begin{aligned}I(x,p)&=-\frac{1}{pL_0}.\frac{dU(x,p)}{dx}=\frac{1}{vL_0}[U_{p1}(p)e^{-p\frac{x}{v}}-U_{r1}(p)e^{p\frac{x}{v}}]=\\&=\frac{1}{R_v}[U_{p1}(p)e^{-p\frac{x}{v}}-U_{r1}(p)e^{p\frac{x}{v}}]=\\&=I_p(x,p)+I_r(x,p)=\frac{1}{R_v}[U_p(x,p)-U_r(x,p)]\end{aligned} \tag{6.3-9}$$

Zavedli jsme označení

$$R_v=vL_0=\frac{L_0}{\sqrt{L_0C_0}}=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,. \tag{6.3-10}$$

Veličina R_v se nazývá **vlnový odpor vedení**.

Poznámka:
Pokud nezanedbáme ztráty na vedení a uvažujeme nenulový odpor R_0 a nenulovou vodivost G_0, platí pro činitele šíření

$$\gamma(p) = \sqrt{(pL_0 + R_0)(pC_0 + G_0)} \tag{6.3-11}$$

a pro vlnovou impedanci

$$Z_v(p) = \sqrt{\frac{pL_0 + R_0}{pC_0 + G_0}}\,. \tag{6.3-12}$$

Činitel šíření γ a vlnový odpor R_v (vlnová impedance Zv) představují tzv. **sekundární parametry** vedení.

Dosud neznáme integrační konstanty, které jsme označili $U_{p1}(p)$ a $U_{r1}(p)$. V časové oblasti jim odpovídají jistá napětí $u_{p1}(t)$ a $u_{r1}(t)$.

Zlomek x/v v exponentech má rozměr času. Je roven době t_x, za kterou vlna na vedení urazí vzdálenost rovnou x.

Originál k součinu $U_p(x,p) = U_{p1}(p)e^{-p\frac{x}{v}}$ je pak napětí $u_p(x,t)=u_{p1}(t-t_x)$, které má stejný průběh jako napětí $u_{p1}(t)$, ale je oproti němu zpožděno o t_x=x/v. Je to tzv. **postupná vlna**, která se šíří rychlostí v od blízkého konce vedení ke vzdálenému.

Na druhé straně originál k součinu $U_r(x,p) = U_{r1}(p)e^{p\frac{x}{v}}$ je napětí $u_r(x,t)=u_{r1}(t+t_x)$, předbíhající průběh $u_{r1}(t)$ v čase, tedy vlna, šířící se opačným směrem. Jde o **zpětnou vlnu**, vyvolanou zdrojem signálu na vzdáleném konci vedení nebo, jak uvidíme dále, vzniklou odražením postupné vlny od vzdáleného konce vedení v důsledku nedokonalého impedančního přizpůsobení.

Celkové napětí je tedy

$$u(x,t) = u_p(x,t) + u_r(x,t)\,. \tag{6.3-13}$$

Proud také obsahuje postupnou a zpětnou vlnu

$$i(x,t) = i_p(x,t) + i_r(x,t) = \frac{1}{R_v}u_p(x,t) - \frac{1}{R_v}u_r(x,t)\,. \tag{6.3-14}$$

6.3.1.1 Nekonečně dlouhé vedení

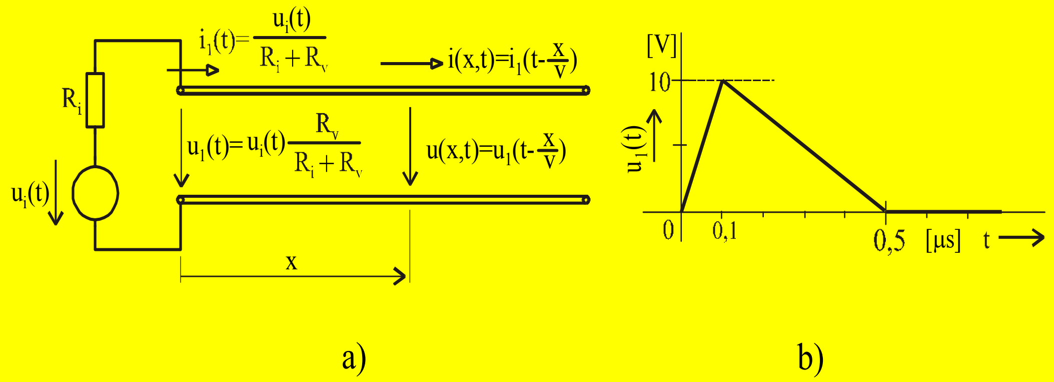
Předpokládejme prozatím, že vedení je nekonečně dlouhé a že je napájeno pouze z blízkého konce. Protože by trvalo nekonečně dlouho, než postupná vlna dorazí na vzdálený konec, zpětná vlna neexistuje a druhý člen ve výrazu pro $U(x,p)$, tj. $U_r(x,p)$, musí být roven nule.

Podíl napětí a proudu v libovolném místě na vedení je roven R_v. Platí to jak pro obrazy, tak i pro okamžité hodnoty.

$$\frac{U_p(x,p)}{I_p(x,p)} = \frac{u_p(x,t)}{i_p(x,t)} = +R_v\,, \tag{6.3-15}$$

Příklad 6.3 –1

Uvažujeme bezeztrátové vedení podle obr. 6.3-1a s primárními parametry $C_0=100$ *pF/m*, $L_0=0{,}25$ *μH/m*. Vedení je na blízkém konci napájeno ze zdroje napětí $u_i(t)$ s vnitřním odporem $R_i=150\Omega$. Vnitřní napětí zdroje má trojúhelníkový průběh znázorněný na obr. 6.3-1b. Vedení je nekonečně dlouhé.



Obrázek 6.3.1 Poměry na vedení nekonečné délky: a) schéma uspořádání, b) vnitřní napětí zdroje signálu

Nejprve určíme sekundární parametry vedení:

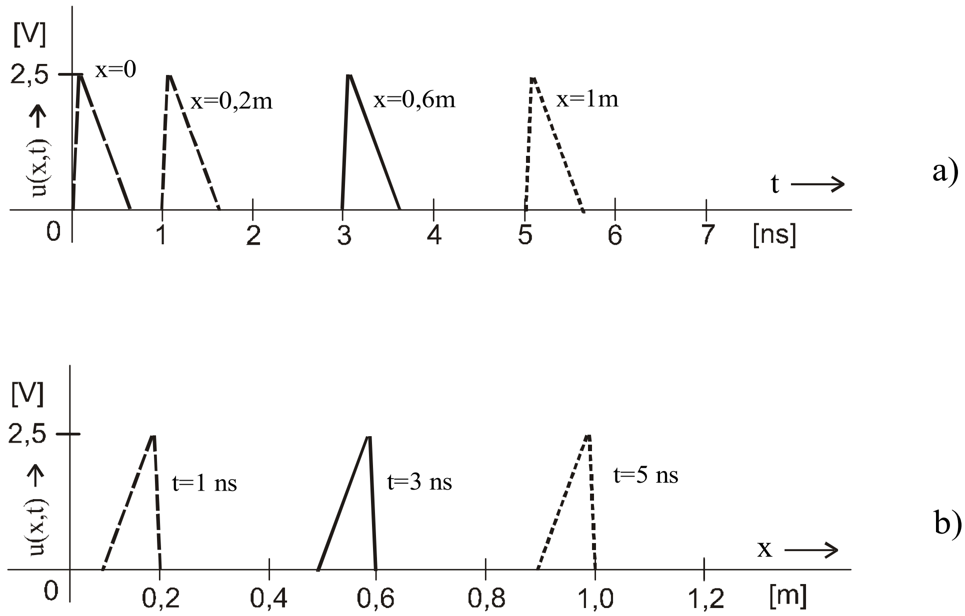
Vlnový odpor $R_v = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 50\Omega$, činitel šíření $\gamma = p\sqrt{L_0 C_0} = p\tau$, kde $\tau = 5\,ns/m$ je měrné zpoždění signálu (zpoždění na metr délky; odpovídající rychlost šíření je pak rovna *v=1/τ=200000 km/s)*. Protože jde o nekonečně dlouhé vedení, je jeho vstupní odpor roven vlnovému odporu $R_v=50\Omega$. Napětí na vstupních svorkách bude mít stejný průběh jako vnitřní napětí zdroje, bude však sníženo o úbytek na vnitřním odporu R_i,

$$u_1(t) = u_i(t)\frac{R_v}{R_i + R_v} = 0.25\,u_i(t)\,.$$

Vstupní proud je $i_1(t) = \dfrac{u_1(t)}{R_v} = \dfrac{u_i(t)}{R_i + R_v}$.

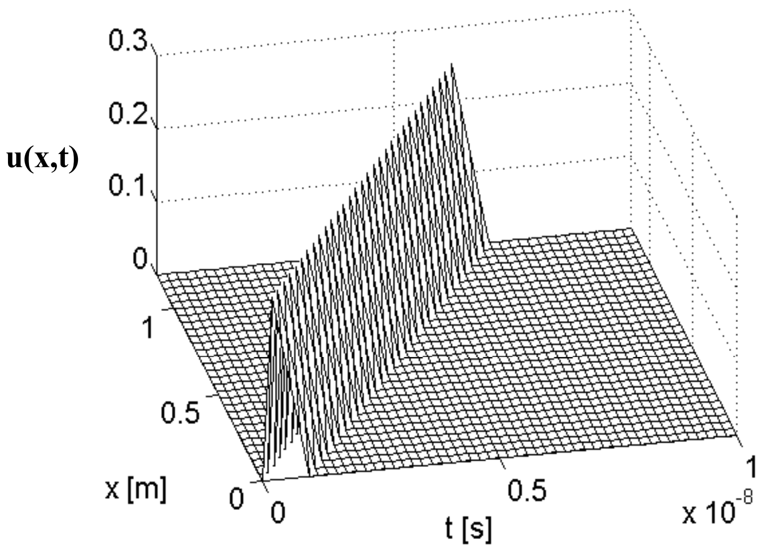
Každý metr vzdálenosti od začátku (blízkého konce) vedení znamená zpoždění signálu o 5 ns. Proto pro napětí a proud v místě *x* platí

$$u(x,t) = u_1(t - \tau x), \quad i(x,t) = i_1(t - \tau x)\,.$$



Obrázek 6.3.2 Průběh napětí na vedení: a) v různých vzdálenostech od blízkého konce,b) rozložení napětí podél vedení v různých časových okamžicích

Ilustrují to průběhy na obr.6.3-2a. Obrázek 6.3-2b na druhé straně znázorňuje, jak se s časem mění rozložení napětí (a v příslušném měřítku i rozložení proudu) v závislosti na x, tj. jak se šíří vlna, vyvolaná vstupním signálem, podél vedení. Na obr.6.3-3 je pak závislost *u(x,t)* zobrazena v jediném grafu.

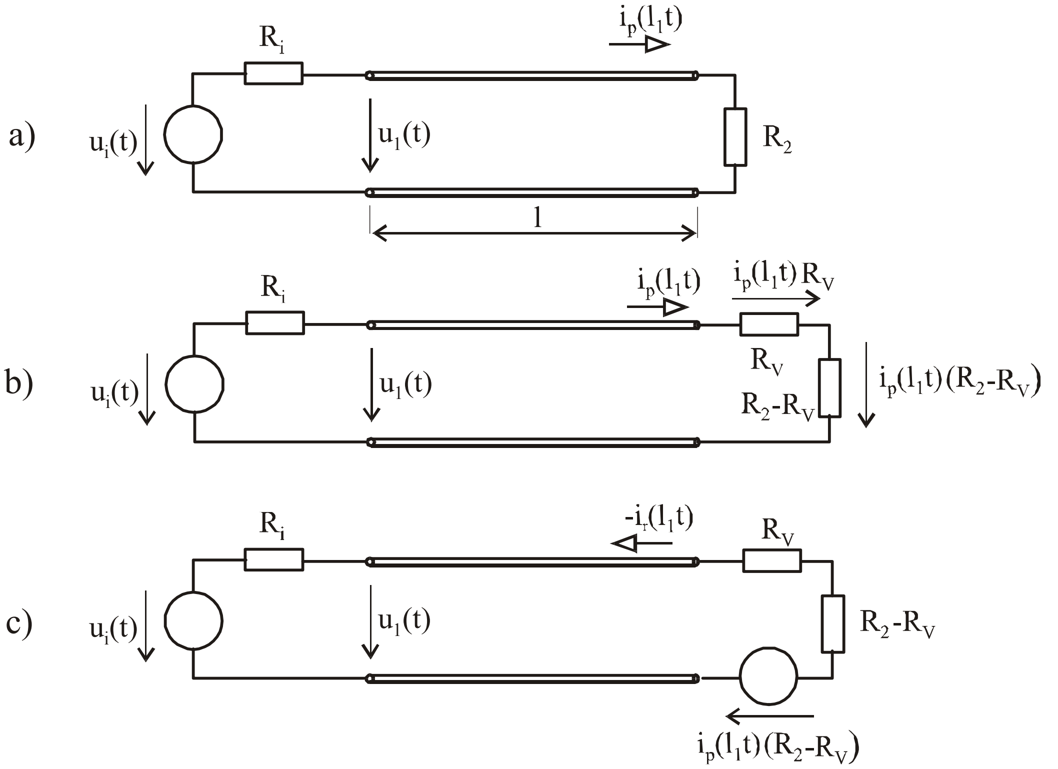


Obrázek 6.3.3 Trojrozměrný model rozložení napětí *u(x,t)*

6.3.1.2 Vedení konečné délky

Jestliže v některé vzdálenosti $x=l$ vedení ukončíme a odříznutou (nekonečně dlouhou) část nahradíme odporem o velikosti R_v, vlna se v úseku od $x=0$ do $x=l$ šíří jako dříve. Na vzdáleném konci vedení v bodě $x=l$ je postupující vlna napětí i vlna proudu opožděna oproti napětí a proudu na blízkém konci o $T=l/v=\tau l$. Jakmile vlna $u_p(l,t)$, $i_p(l,t)$ dorazí na konec, celá její energie se ztratí v zatěžovacím odporu.

Uvažujme nyní, že zatěžovací odpor R_2 je různý od R_v (obr. 6.3-4a). Můžeme si jej představit jako sériové spojení vlnového odporu R_v a odporu R_2-R_v (obr.6.3-4b). Úbytek $i_p(l,t).R_v$ vyvolaný postupnou vlnou proudu i_p je napětí, které by v bodě $x=l$ bylo, kdyby vedení dále pokračovalo do nekonečna. Úbytek na rozdílovém odporu R_2 -R_v představuje pak něco nového, co narušuje dosavadní hladký postup vlny zleva doprava. Tento úbytek vyvolá



Obrázek 6.3.4 Odraz vlny na vedení: a) vedení zakončené R_2 ,b) náhradní schéma, c) náhradní schéma se zdrojem napětí

odraženou vlnu proudu i_r, která bude postupovat opačným směrem a která je reprezentována druhým členem v rovnici (6.3-14). Situaci zachycuje náhradní schéma na obr. 6.3-4c. Protože vedení představuje pro tuto vlnu odpor R_v, je proud odražené vlny v $x=l$ roven

$$i_r(l,t) = -i_p(l,t).(R_2 - R_v).\frac{1}{R_2 + R_v} = -i_p(l,t).\frac{R_2 - R_v}{R_2 + R_v} = -\rho_2.i_p(l,t) \qquad (6.3\text{-}16a)$$

a napětí

$$u_r(l,t) = i_r(l,t).R_v = u_p(l,t).\frac{R_2 - R_v}{R_2 + R_v} = \rho_2.u_p(l,t)\,. \tag{6.3-16b}$$

Zlomek

$$\frac{R_2 - R_v}{R_2 + R_v} = \rho_2 \tag{6.3-17}$$

udává ***činitel odrazu*** (*na vzdáleném konci* vedení).

Celkové napětí na vzdáleném konci je rovno součtu napětí postupné a odražené vlny

$$u(l,t) = u_p(l,t) + u_r(l,t) = u_p(l,t).(1+\rho_2) \tag{6.3-18a}$$

a proud na konci vedení

$$i(l,t) = i_p(l,t) + i_r(l,t) = i_p(l,t).(1-\rho_2)\,. \tag{6.3-18b}$$

Odražená vlna se šíří směrem od vzdáleného konce vedení k blízkému konci rychlostí v. Jakmile dorazí na blízký konec do bodu $x=0$, odrazí se tentokrát s činitelem odrazu (*na blízkém konci*)

$$\rho_1 = \frac{R_1 - R_v}{R_1 + R_v} \tag{6.3-19}$$

a odražená část opět postupuje zpět, tj. směrem rostoucího x.

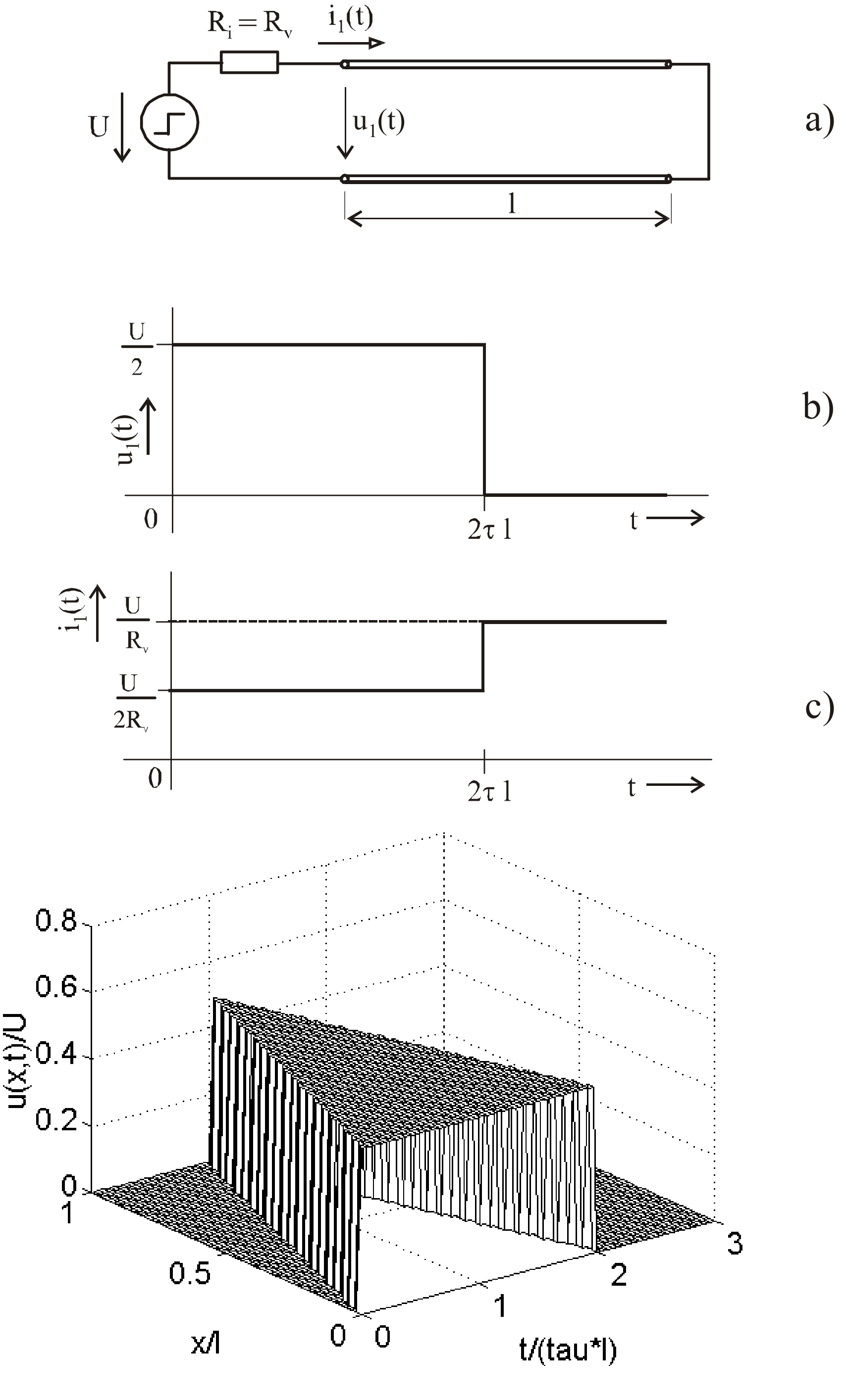
Poznámka:
Činitelé odrazu mohou nabývat hodnot mezi -1 (pro případ, že zakončovací odpor R_1 resp. R_2 je roven nule) a +1 (v případě, že vedení je na příslušném konci naprázdno, tj. zakončovací odpor je nekonečně veliký).

Příklad 6.3-2

Bezeztrátové vedení na obr. 4.2-5a s vlnovým odporem R_v a činitelem šíření γ je napájeno ze zdroje napětí, které se v čase $t=0$ mění skokem na konstantní hodnotu U. Vnitřní odpor zdroje je roven vlnovému odporu, $R_i=R_v$. Vedení délky l je na vzdáleném konci zkratováno, zatěžovací odpor $R_2=0$ a činitel odrazu $\rho_2= -1$.

Časové průběhy napětí $u_1(t)$ a proudu $i_1(t)$ na začátku (blízkém konci) vedení jsou nakresleny na obr. 4.2-5b,c. V okamžiku $t=0$ se napětí $u_1(t)$ skokem změní z nuly na $U/2$, protože vstupní odpor vedení s vnitřním odporem zdroje napětí tvoří dělič s dělicím poměrem ½. Proud $i_1(0)=U/(2R_v)$. Skutečnost, že vedení je na vzdáleném konci zkratováno, se zatím nemůže projevit. Po uplynutí doby rovné τl dospěje vlna na vzdálený konec vedení. Zde se vlna napětí odrazí a se záporným znaménkem běží zpět. Po uplynutí dalšího intervalu τl dorazí na počátek vedení. Teprve od okamžiku $t=2\tau l$ je napětí $u_1(t)=0$, zkrat na konci vedení se projeví na jeho začátku. Proudová vlna se naproti tomu odrazí s činitelem odrazu rovným $+1$, takže od okamžiku $t=2\tau l$, kdy zpětná vlna dospěje na blízký konec vedení, je vstupní proud omezen pouze vnitřním odporem zdroje a je roven U/R_v.

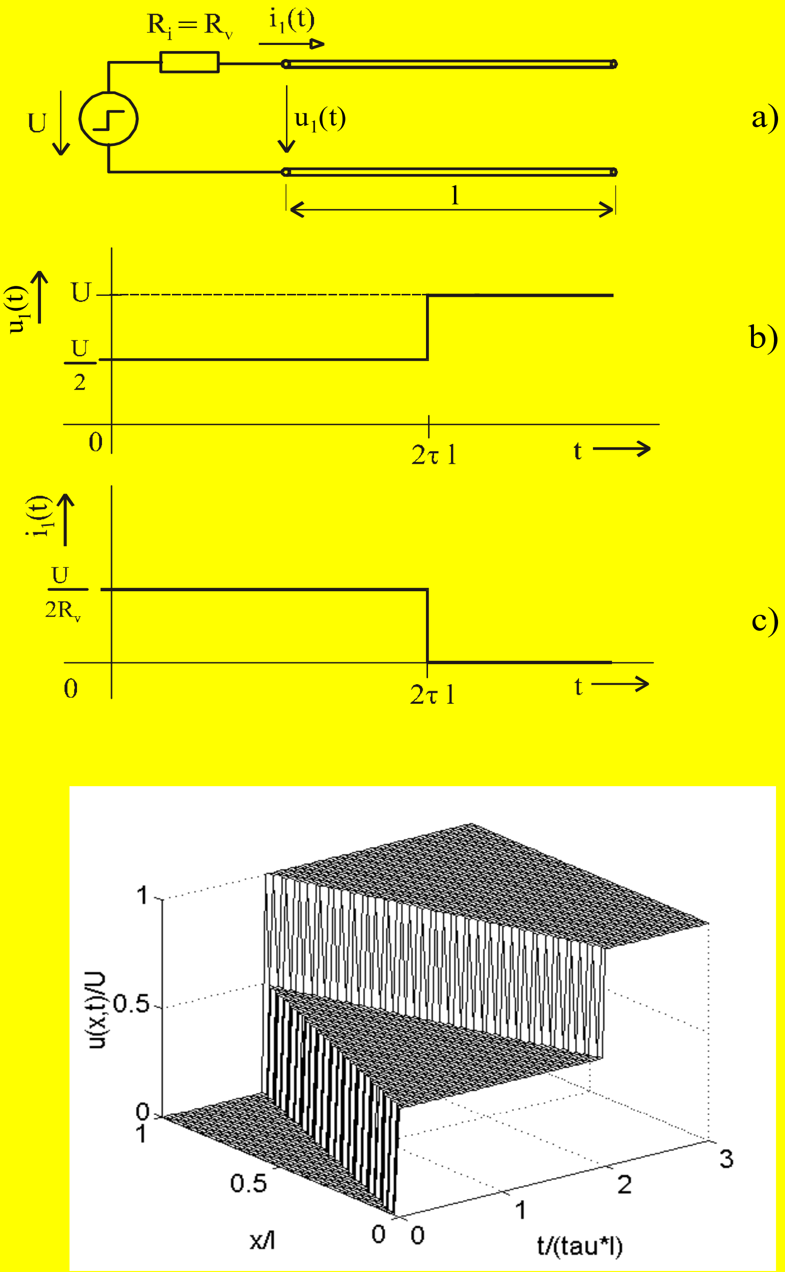
Tento příklad ukazuje jednu možnost, jak prakticky generovat velmi krátké napěťové impulsy obdélníkového průběhu. Délka impulsu je dána délkou (a činitelem šíření) použitého tvarovacího vedení. Aby generátor impulsů na tomto principu správně pracoval, je třeba, aby se vstupní napětí skutečně měnilo skokem. Toho se dosahuje použitím velmi rychlého spínače, jímž zdroj stejnosměrného napětí *U* připojíme v čase *t*=0 k začátku tvarovacího vedení.



Obrázek 6.3.5 K příkladu 6.2-2 : a) základní schéma, b) časový průběh napětí na blízkém konci, c) časový průběh proudu na blízkém konci, d) prostorový obrázek napětí *u(x,t)*.

Příklad 6.3-3

Bezeztrátové vedení na obr. 6.3-6a s vlnovým odporem R_v a činitelem šíření γ je napájeno ze zdroje napětí, které se v čase $t=0$ mění skokem na konstantní hodnotu U. Vnitřní odpor zdroje je roven vlnovému odporu, $R_i=R_v$. Vedení délky l je na vzdáleném konci naprázdno, zatěžovací odpor R_2 je nekonečně veliký a činitel odrazu $\rho_2= +1$.



Obrázek 6.3.6 K Příkladu 4.3 : a) Základní schéma, b) časový průběh napětí na blízkém konci, c) časový průběh proudu na blízkém konci, d) prostorový obrázek napětí *u(x,t)*.

Časové průběhy napětí $u_1(t)$ a proudu $i_1(t)$ na začátku (blízkém konci) vedení jsou nakresleny na obr. 6.3 -6b a obr. 6.3-6c. V okamžiku $t=0$ se napětí $u_1(t)$ skokem změní z nuly na $U/2$, a proud na $i_1(0)=U/(2R_v)$ z důvodů, uvedených u příkladu 6.3-2. Skutečnost, že vedení je na vzdáleném konci naprázdno, se zatím nemůže projevit. Po uplynutí doby rovné τl dospěje vlna na vzdálený konec vedení. Zde se vlna napětí odrazí a s původním kladným znaménkem běží zpět. Po uplynutí dalšího intervalu τl dorazí na počátek vedení a od okamžiku $t=2\tau l$ je napětí $u_1(t)=U$. Proudová vlna se naproti tomu odrazí s činitelem odrazu rovným -1, takže od okamžiku $t=2\tau l$, kdy zpětná vlna dospěje na blízký konec vedení, je vstupní proud roven nule a na vnitřním odporu zdroje je nulový úbytek napětí.

Tento příklad ukazuje na možný princip generování velmi krátkých obdélníkových impulsů proudu.

6.3.1.3 Odvození obecných vztahů pro poměry na vedení konečné délky

V úvahách v předcházejícím odstavci jsme sledovali situaci na vedení v prvních okamžicích po přivedení signálu na vstup. Nyní odvodíme vztahy, které umožní simulovat poměry na vedení v libovolném okamžiku. Použijeme k tomu okrajové podmínky dané poměry na obou koncích vedení a určíme integrační konstanty $U_{p1}(p)$ a $U_{r1}(p)$ ve vztazích (6.3-5) a (6.3-6).

Na blízkém konci dosadíme $x=0$

$$U(0,p)=U_1(p)=U_{p1}+U_{r1}, \qquad I(0,p)=I_1(p)=\frac{1}{R_v}(U_{p1}+U_{r1}) \quad . \tag{6.3-20}$$

Podobně na vzdáleném konci, $x=l$

$$\begin{aligned} U(l,p)&=U_2(p)=U_{p1}e^{-\gamma l}+U_{r1}e^{+\gamma l}, \\ I(l,p)&=I_2(p)=\frac{1}{R_v}(U_{p1}e^{-\gamma l}-U_{r1}e^{+\gamma l}) \end{aligned} \tag{6.3-21}$$

Řešením rovnic (4.2-21) určíme integrační konstanty

$$U_{p1}=\frac{U_2+R_vI_2}{2}e^{+\gamma l}, \qquad U_{r1}=\frac{U_2-R_vI_2}{2}e^{-\gamma l}. \tag{6.3-22}$$

Potom napětí v libovolném místě $0 \le x \le l$ bude

$$\begin{aligned} U(x,p)&=\frac{U_2+R_vI_2}{2}e^{+\gamma(l-x)}+\frac{U_2-R_vI_2}{2}e^{-\gamma(l-x)}=U_2\cosh\gamma(l-x)+I_2R_v\sinh\gamma(l-x)= \\ &=U_2\cosh\gamma y+I_2R_v\sinh\gamma y\,. \end{aligned} \tag{6.3-23}$$

Podobně proud

$$I(x,p)=U_2\frac{1}{R_v}\sinh\gamma y+I_2\cosh\gamma y\,, \tag{6.3-24}$$

kde $y=l-x$ je vzdálenost měřená od (vzdáleného) konce vedení.

Dosadíme $x=0$ a z rovnic (6.3-23) a (6.3-24) získáme vztahy pro napětí U_1 a proud I_1 na blízkém konci v závislosti na veličinách na vzdáleném konci

$$U_1 = U_2 \cosh \gamma l + I_2 R_v \sinh \gamma l$$
$$I_1 = U_2 \frac{1}{R_v} \sinh \gamma l + I_2 \cosh \gamma l \tag{6.3-25}$$

Je to obdoba kaskádních rovnic dvojbranu (s tím rozdílem, že proud I_2 je orientován obráceně). Z kaskádních parametrů vypočítáme prvky admitanční matice

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R_v}\begin{bmatrix} \coth \gamma l & \dfrac{-1}{\sinh \gamma l} \\ \dfrac{-1}{\sinh \gamma l} & \coth \gamma l \end{bmatrix}. \tag{6.3-26}$$

Admitanční matici můžeme již přímo použít k formulaci rovnic složité soustavy metodou uzlových napětí nebo modifikovanou metodou uzlových napětí.

Tak např. v případě, že vedení je na blízkém konci napájeno ze zdroje napětí $u_{i1}(t)$, jehož obraz je $U_{i1}(p)$ a vnitřní impedance $Z_1(p)$ a na vzdáleném konci je zatíženo impedancí $Z_2(p)$, sestavíme rovnice pro napětí na obou koncích vedení jako

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{R_v} \coth \gamma l & \dfrac{-1}{R_v \sinh \gamma l} \\ \dfrac{-1}{R_v \sinh l} & \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{R_v} \coth \gamma l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z_1} U_{i1} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.3-27}$$

Řešením těchto rovnic dostaneme pro napětí na vzdáleném konci výraz

$$U_2(p) = U_{i1}(p) \frac{Z_2}{R_v (1 + \dfrac{Z_1 + Z_2}{R_v} \coth \gamma l + \dfrac{Z_1 Z_2}{R_v^{\,2}}) \sinh \gamma l}. \tag{6.3-28}$$

Po úpravách

$$U_2(p) = 2U_{i1}(p) \frac{R_v}{Z_1 + R_v} \frac{Z_2}{Z_2 + R_v} \frac{e^{-\gamma l}}{1 - \dfrac{Z_1 - R_v}{Z_1 + R_v} \dfrac{Z_2 - R_v}{Z_2 + R_v} e^{-2\gamma l}} =$$
$$= 2U_{i1}(p) \frac{R_v}{Z_1 + R_v} \frac{Z_2}{Z_2 + R_v} \frac{e^{-\gamma l}}{1 - \rho_1 \rho_2 e^{-2\gamma l}} \tag{6.3-29}$$

Napětí v místě vzdáleném o x od blízkého konce je pak po dosazení do (4.2-23)

$$U(x,p) = \frac{U_2 + R_v I_2}{2} e^{+\gamma(l-x)} + \frac{U_2 - R_v I_2}{2} e^{-\gamma(l-x)} = U_{i1} \frac{R_v}{Z_1 + R_v} \frac{e^{-\gamma x} + \rho_2 e^{-\gamma(2l-x)}}{1 - \rho_1 \rho_2 e^{-2\gamma l}} \tag{6.3-30}$$

Konkrétní situaci pak řešíme tak, že dosadíme za obraz vstupního signálu, za sekundární parametry vedení R_v a γ, za impedance Z_1 a Z_2 a oba činitele odrazu. Originál $u(x,t)$ se pak hledá inverzí Laplaceova obrazu $U(x,p)$. Analytický výraz pro $u(x,t)$ lze nalézt pouze v nejjednodušších případech. Jinak musíme použít vhodného numerického postupu.

Příklad 6.3-4

Uvažujeme vedení napájené ze zdroje signálu $U_{i1}(p)$ s vnitřním odporem R_1 a na vzdáleném konci zakončené odporem R_2. Velikosti odporů R_1 a R_2 se liší od vlnového odporu R_v, takže oba činitelé odrazu mají reálné hodnoty od nuly různé, kladné nebo záporné.

Ve výrazu (6.3-30) pro obraz napětí v libovolném místě na vedení dosadíme $Z_1=R_1$, $\gamma = p\tau = p\sqrt{L_0 C_0}$, $2l-x=l+y$ a upravíme.

$$\begin{aligned} U(x,p) &= U_{i1}\frac{R_v}{R_1+R_v}\left(e^{-p\tau x}+\rho_2 e^{-p\tau(2l-x)}\right)\frac{1}{1-\rho_1\rho_2 e^{-2p\tau l}} = \\ &= U_{i1}\frac{R_v}{R_1+R_v}\left(e^{-p\tau x}+\rho_2 e^{-p\tau(l+y)}\right)\frac{1}{1-\rho_1\rho_2 e^{-2p\tau l}} \end{aligned} \qquad (6.3\text{-}31)$$

Poslední zlomek ve výrazu můžeme chápat jako součet nekonečné geometrické řady $1+q^2+q^3+\ldots$ s kvocientem $q=\rho_1\rho_2 e^{-2p\tau l}$

$$\frac{1}{1-\rho_1\rho_2 e^{-2p\tau l}} = 1+\rho_1\rho_2 e^{-2p\tau l}+\rho^2{}_1\rho^2{}_2 e^{-4p\tau l}+\rho^3{}_1\rho^3{}_2 e^{-6p\tau l}+\ \ldots \qquad (6.3\text{-}32)$$

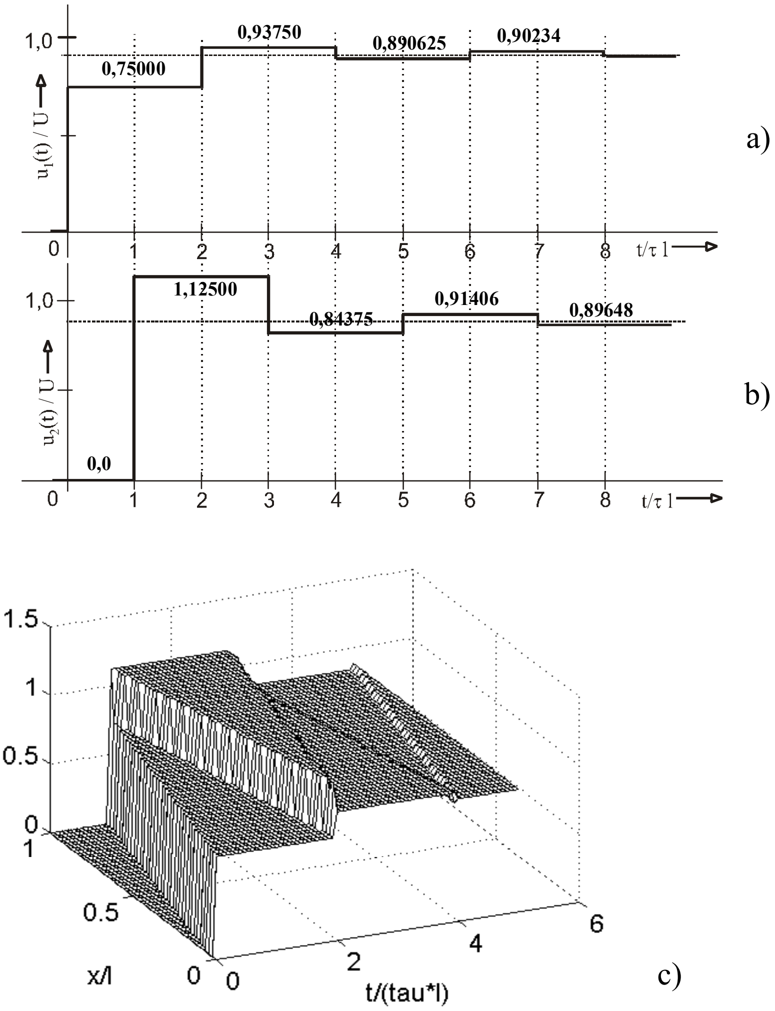
Pak po vynásobení výrazů s exponenciálními funkcemi dostaneme pro obraz $U(x,p)$

$$\begin{aligned} U(x,p) &= U_{i1}\frac{R_v}{R_1+R_v}\left[e^{-p\tau x}+\rho_2 e^{-p\tau(l+y)}+\rho_1\rho_2 e^{-p\tau(2l+x)}+\rho_1\rho^2{}_2 e^{-p\tau(2l+y)}+\ldots\right] = \\ &= U_{i1}\frac{R_v}{R_1+R_v}e^{-p\tau x}+U_{i1}\frac{R_v}{R_1+R_v}\rho_2 e^{-p\tau(l+y)}+U_{i1}\frac{R_v}{R_1+R_v}\rho_1\rho_2 e^{-p\tau(2l+x)}+ \\ &+U_{i1}\frac{R_v}{R_1+R_v}\rho_1\rho^2{}_2 e^{-p\tau(2l+y)}+\ldots \end{aligned}$$

(6.3-33)

Výraz $U_i R_v/(R_1+R_v)$ je obrazem průběhu napětí, které by bylo na blízkém konci vedení za předpokladu, že by vedení bylo nekonečně dlouhé nebo na vzdáleném konci přizpůsobené. Tento obraz je postupně násoben činiteli odrazu a exponenciálními funkcemi typu e^{-pT}. Každá taková exponenciální funkce proměnné p indikuje zpoždění originálu o čas T.

Z výsledného výrazu tedy plyne, že v časovém intervalu $0\leq t\leq \tau l$ na vedení existuje pouze jedna postupná vlna, popsaná prvním členem v rovnici (6.3-18a). Originály k druhému a dalším členům jsou zatím rovny nule. V intervalu $\tau l\leq t\leq 2\tau l$ se přidá první zpětná (od nepřizpůsobeného zatěžovacího odporu odražená) vlna. Ta dorazí na blízký konec vedení v čase $t=2\tau l$ a opět se odrazí. Vznikne druhá postupná vlna, popsaná třetím členem ve výrazu pro obraz napětí a tak to postupuje i dále. Celkové napětí v libovolném bodě je pak dáno superpozicí všech postupných a odražených vln, které v daném okamžiku existují. Vzhledem k tomu, že absolutní hodnoty koeficientů odrazu jsou v obecném případě vždy menší než 1, vliv jednotlivých členů v součtu stále klesá, takže stačí vzít v úvahu jejich konečný počet.



Obrázek 6.3.7 Průběhy napětí na nepřizpůsobeném vedení : a) napětí na blízkém konci, b) napětí na vzdáleném konci, c) prostorový obrázek napětí *u(x,t)*

Je-li např. vstupní napětí konstantní (v $t=0$ se mění skokem na U) a platí $R_1=R_v/3$, $R_2=3R_v$, jsou činitelé odrazu $\rho_1=-1/2$, $\rho_2=+1/2$. Pak je průběh napětí $u_1(t)$ na blízkém konci vedení, $x=0$, zobrazen na obr. 6.3-7a, průběh $u_2(t)$ na vzdáleném konci, $x=l$, na obr. 6.3-7b. Po uplynutí dostatečně dlouhé doby jsou pak obě napětí stejně veliká a jsou dána dělicím poměrem $R_2/(R_1+R_2)=0,9$ násobeným velikostí napětí zdroje U.

6.3.2 Vedení se ztrátami

Často není možno zanedbat ztráty vlivem konečných velikostí podélného odporu R_0 a příčné vodivosti G_0. Charakteristická (vlnová) impedance a činitel šíření je pak dán dříve uvedenými vztahy (6.3-10) a (6.3-11).

$$Z_v(p) = \sqrt{\frac{pL_0 + R_0}{pC_0 + G_0}}, \qquad \gamma(p) = \sqrt{(pL_0 + R_0)(pC_0 + G_0)}\,.$$

Oba parametry jsou obecně iracionální funkcí proměnné p.

Vztah (6.3-30) pro obraz napětí $U(x,p)$ platí i v tomto případě. Situace je však o to složitější, že i koeficienty odrazu jsou nyní závislé na komplexní proměnné p a exponenciální funkce, jimiž je násoben obraz napětí na vstupu, představují vedle časového zpoždění v obecném případě i změnu tvaru přenášeného signálu.

6.3.2.1 Nezkreslující vedení

Podmínka

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0} \quad \text{neboli} \quad \frac{L_0}{C_0} = \frac{R_0}{G_0} \tag{6.3-34}$$

vede na zvláštní případ tzv. **nezkreslujícího vedení**.

Charakteristická impedance je zde konstanta, nezávislá na p, stejně jako u vedení bezeztrátového.

$$Z_v(p) = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,. \tag{6.3-35}$$

Činitel šíření se dá vyjádřit jako součet

$$\begin{aligned}\gamma(p) &= \sqrt{L_0C_0}\sqrt{\left(p + \frac{R_0}{L_0}\right)\left(p + \frac{G_0}{C_0}\right)} = R_0\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + p\sqrt{L_0C_0} = \\ &= G_0\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} + p\sqrt{L_0C_0} = \beta + \frac{p}{v}\,,\end{aligned} \tag{6.3-36}$$

kde

$$\beta = \frac{R_0}{R_v} = G_0R_v = \sqrt{R_0G_0}\,.$$

Proto exponenciální funkce $exp(-\gamma x)$ ve vztahu pro obraz napětí nebo proudu je rovna

$$e^{-\gamma(p)x} = e^{-\beta x} e^{-p\frac{x}{v}} \tag{6.3-37}$$

První součinitel nezávisí na p a indikuje exponenciální pokles amplitudy vlny s rostoucí vzdáleností od zdroje signálu. Druhý exponenciální člen vyjadřuje časové zpoždění podobně jako tomu bylo u bezeztrátového vedení.

Dosadíme do původního vztahu a vidíme, proč se vedení, jehož primární parametry splňují rovnici (6.3-34), nazývá nezkreslující: vlna napětí nebo proudu při postupu po vedení nemění tvar, pouze s rostoucí vzdáleností klesá její amplituda.

6.3.2.2 Obecné vedení se ztrátami

Není-li splněna rovnost časových konstant (6.3-34), jsou vlnová impedance i činitel šíření závislé na proměnné p.

I když je vedení zakončeno rezistorem, jsou činitelé odrazu závislí na proměnné p.

Ve výrazu pro činitel šíření se nedá oddělit útlum od časového zpoždění. Zpoždění signálu i odraz na obou koncích jsou proto doprovázeny i jeho tvarovým zkreslením.

6.3.3 Shrnutí k podkapitole 6.3

Řešení telegrafních rovnic v časové oblasti ukazuje, že výsledné napětí i proud v daném místě vedení je obecně dáno **součtem postupujících a** (odražených) **zpětných vln** :

$$u(x,t) = u_p(x,t) + u_r(x,t) \ , \qquad i(x,t) = i_p(x,t) + i_r(x,t) = \frac{1}{R_v} u_p(x,t) - \frac{1}{R_v} u_r(x,t) \, .$$

V případě ztrátového vedení (R_0, G_0 jsou nenulové) jsou vlny exponenciálně tlumeny a vlivem časových zpoždění dochází obecně i ke změně tvaru impulsu. Pouze v případě, že je splněna podmínka $L_0/R_0=C_0/G_0$, jde o **nezkreslující vedení**, kdy vlny při postupu po vedení nemění tvar, s rostoucí vzdáleností se pouze zmenšuje jejich velikost. V případě odrazu (na konci, případně potom opět na začátku vedení) je velikost zpětných vln napětí a proudu určena činitelem odrazu ρ , který je mírou nepřizpůsobení vedení k zátěži .

Je-li vedení nekonečně dlouhé, nebo vedení impedančně přizpůsobené (zakončené vlnovým odporem R_v), k odrazu vlny na konci vedení nedochází a na vedení se vyskytuje jen vlna (impuls) postupující.

6.4 Harmonický ustálený stav na vedení

Při aplikacích přenosových vedení v radiotechnice (např. propojení rádiového vysílače nebo přijímače s anténou) nás zajímají poměry v ustáleném harmonickém stavu spíše než přechodné jevy v časové oblasti. Provádíme proto analýzu v kmitočtové oblasti a počítáme komplexní hodnoty impedancí a přenosů. Při výpočtech vycházíme z transformovaných diferenciálních rovnic (6.2-6a, b), kde místo komplexní proměnné p dosazujeme $j\omega$. Namísto

Laplaceových obrazů napětí a proudů zavedeme příslušné fázory a operátorové výrazy pro **charakteristickou impedanci** a **konstantu šíření** nahradíme komplexními hodnotami

$$\mathbf{Z}_v(j\omega) = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}\,, \qquad \gamma(j\omega) = \beta + j\alpha = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}\,. \tag{6.4-1}$$

6.4.1 Postupná a zpětná vlna na vedení

Pro bezeztrátové vedení platí:

$$\mathbf{Z}_v = R_v = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,,\ \gamma(j\omega) = j\alpha = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j\frac{\omega}{v}. \tag{6.4-2}$$

Podobně jako při řešení v časové oblasti, řešení v ustáleném harmonickém stavu se skládá z postupné a odražené vlny. Podobně jako v časové oblasti, na nekonečně dlouhém vedení nemůže odražená vlna existovat. Rovnice (6.3-8) pak přejde na rovnici pro fázor efektivní hodnoty napětí ve vzdálenosti x od blízkého konce, tj.

$$\mathbf{U}(x, j\omega) = \mathbf{U}_1(j\omega)e^{-j\omega\frac{x}{v}}, \tag{6.4-3}$$

kde $\mathbf{U}_1(j\omega)$ je fázor efektivní hodnoty napětí na blízkém konci.
Okamžitá hodnota napětí je pak

$$u(x,t) = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\mathbf{U}(x, j\omega)e^{j\omega t}] = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t - \omega\frac{x}{v}) = U_{1m}\sin[\omega(t - \frac{x}{v})]\,. \tag{6.4-4}$$

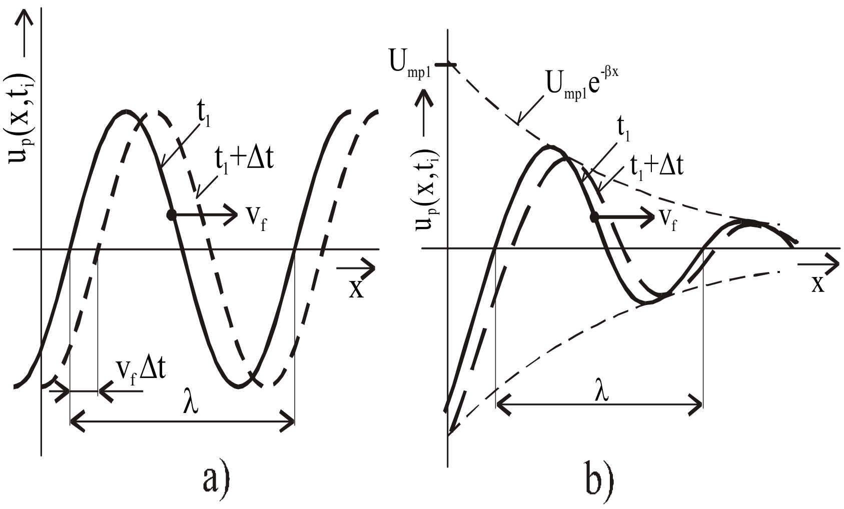
Pro jednoduchost předpokládáme nulovou počáteční fázi napětí $\mathbf{U}_1$. Zvolíme určitý okamžik t a zakreslíme rozložení napětí v závislosti na x. Rozložení napětí je periodické s periodou (ve směru proměnné x) rovnou $\lambda = Tv = v/f$. Veličina λ se nazývá **délka vlny na vedení**. Platí pro ni

$$\lambda = vT = \frac{\omega T}{\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha}. \tag{6.4-5}$$

V následujícím okamžiku $t+\Delta t$ se celá vlna posune rychlostí v ve směru kladného x o úsek $v.\Delta t$, jak je v obrázku 6.4.-1a naznačeno čárkovaně. Na obr. 6.4-1b je nakreslen průběh postupné tlumené vlny na vedení, u kterého by nebylo možné ztráty zanedbat.
Na vzdáleném konci vedení konečné délky dochází obecně k odrazu s činitelem

$$\rho_2(j\omega) = \frac{\mathbf{Z}_2(j\omega) - \mathbf{Z}_v(j\omega)}{\mathbf{Z}_2(j\omega) + \mathbf{Z}_v(j\omega)} = \rho_2 e^{j\delta_2}\,. \tag{6.4-6}$$

Na vedení pak existuje vedle postupné vlny i vlna odražená, šířící se opačným směrem a mající amplitudu rovnou $U_1|\rho_2|$ (stále uvažujeme vedení beze ztrát). V každém místě na vedení pak obě vlny superponují. Tam, kde se setkávají se stejnou fází, se jejich hodnoty



Obrázek 6.4.1 Postupná vlna na vedení : a) netlumená, b) tlumená

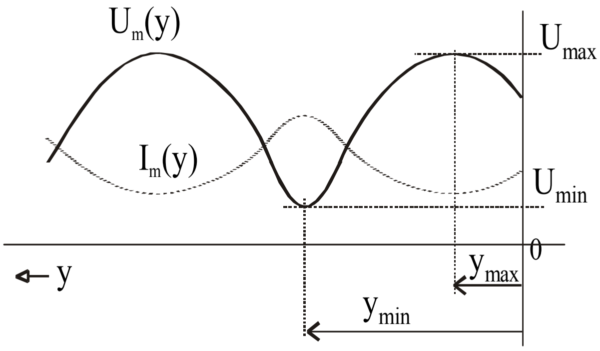
sečítají a celkové napětí je tam rovno

$$U_{\max} = U_1 (1 + |\rho_2|) . \tag{6.4 -7}$$

V místech, kam přicházejí vlny s opačnými fázemi, se jejich hodnoty odečítají a napětí je tam

$$U_{\min} = U_1 (1 - |\rho_2|) . \tag{6.4 -8}$$

Na vedení potom vznikají **stojaté vlny**. Jejich existenci můžeme ověřit měřením napětí mezi vodiči vedení v různých místech. Příklad takového rozložení napětí je na obr.6.4-2.



Obrázek 6.4.2 Rozložení amplitudy napětí a proudu podél vedení

Poměr

$$PSV = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1+|\rho_2|}{1-|\rho_2|} \tag{6.4-9}$$

se nazývá **poměr stojatých vln**. Označuje se také často jako SWR z anglického "standing wave ratio" a udává se v decibelech. Je mírou kvality impedančního přizpůsobení zátěže k vedení.

Pro dokonale přizpůsobenou zátěž je $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_v$, tj. $\rho_2=0$ a poměr stojatých vln $PSV=1$ $(0\ dB)$. Pro vedení naprázdno nebo nakrátko je $\rho_2 = \pm 1$ a $PSV \to \infty$.

Podle vzdálenosti y_{max} prvního maxima resp. prvního minima y_{min} od vzdáleného konce vedení (viz obr.6.4-2) usuzujeme na argument činitele odrazu δ_2. Čas, který postupující vlna potřebuje, aby dorazila z bodu y_{max} na konec vedení, je

$$t_{\max} = \frac{y_{\max}}{v} = \frac{y_{\max}}{\omega}\alpha\,. \qquad (6.4\text{-}10)$$

Fáze vlny se mezitím zpozdí o $\omega\, t_{\max} = \alpha\, y_{\max}$. Činitel odrazu natočí ještě fázi o úhel δ_2, takže odražená vlna přichází do bodu y_{max} s natočením proti postupující vlně rovným

$$-2\alpha\, y_{\max} + \delta_2\,. \qquad (6.4\text{-}11)$$

Aby byly obě vlny ve fázi, musí být

$$-2\alpha\, y_{\max} + \delta_2 = -2\pi \quad , \qquad \text{tj.} \qquad \delta_2 = 2(\alpha\, y_{\max} - \pi)\,, \qquad (6.4\text{-}12)$$

resp. v protifázi

$$-2\alpha\, y_{\min} + \delta_2 = -\pi \quad , \qquad \text{tj.} \qquad \delta_2 = 2(\alpha\, y_{\min} - \frac{\pi}{2})\,. \qquad (6.4\text{-}13)$$

Při známé velikosti charakteristické impedance dokážeme pak z hodnot PSV a y_{max} resp. y_{min} vypočítat komplexní hodnotu zatěžovací impedance $\mathbf{Z}_2(j\omega)$.

6.4.2 Vstupní impedance bezeztrátového vedení konečné délky

Na základě rovnic (6.3-25) a (6.4-2) platí pro bezeztrátové vedení v harmonickém ustáleném stavu

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{U}_2 \cosh(j\alpha\, l) + \mathbf{I}_2 R_v \sinh(j\alpha\, l)\,, \\ \mathbf{I}_1 &= \mathbf{U}_2 \frac{1}{R_v}\sinh(j\alpha\, l) + \mathbf{I}_2 \cosh(j\alpha\, l)\,. \end{aligned} \qquad (6.4\text{-}14)$$

Uvážíme, že $\cosh(jx) = \cos x$, $\sinh(jx) = j\sin x$, $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{U}_2 \cos(2\pi \frac{l}{\lambda}) + j\mathbf{I}_2 R_v \sin(2\pi \frac{l}{\lambda}) \\ \mathbf{I}_1 &= j\mathbf{U}_2 \frac{1}{R_v}\sin(2\pi \frac{l}{\lambda}) + \mathbf{I}_2 \cos(2\pi \frac{l}{\lambda}) \end{aligned} \quad . \qquad (6.4\text{-}15)$$

Protože dále $\mathbf{U}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2$, vstupní impedanci $\mathbf{Z}_{vst}$ získáme jako podíl

$$\mathbf{Z}_{vst} = \frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{Z}_2 \cos(2\pi \frac{l}{\lambda}) + jR_v \sin(2\pi \frac{l}{\lambda})}{j\frac{1}{R_v}\sin(2\pi \frac{l}{\lambda}) + \mathbf{Z}_2 \cos(2\pi \frac{l}{\lambda})} = R_v \frac{\mathbf{Z}_2 \cos(2\pi \frac{l}{\lambda}) + jR_v \sin(2\pi \frac{l}{\lambda})}{R_v \cos(2\pi \frac{l}{\lambda}) + j\mathbf{Z}_2 \sin(2\pi \frac{l}{\lambda})}. \quad (6.4\text{-}16)$$

Vstupní impedance závisí na vlnovém odporu vedení, na zatěžovací impedanci a na poměru délky vedení k délce vlny na vedení.

6.4.2.1 Některé zvláštní případy

1. **Vedení impedančně přizpůsobené**, $\mathbf{Z}_2 = R_v$

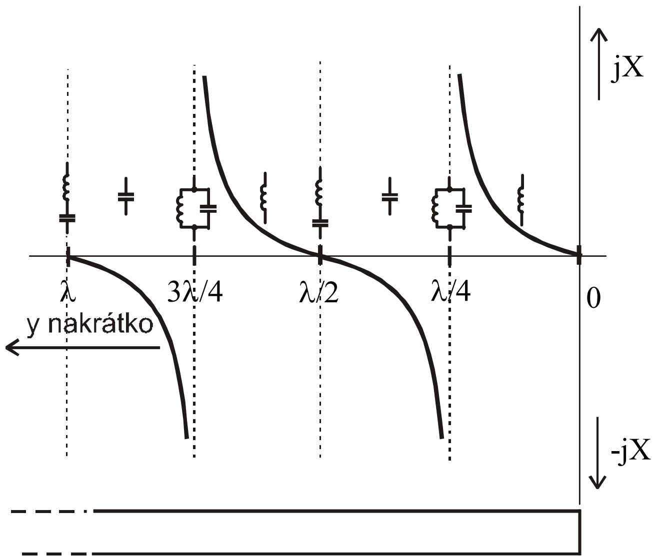
   Vstupní impedance $\mathbf{Z}_{vst} = R_v$ bez ohledu na délku vedení.

   Tento závěr proto platí i pro vedení nekonečné délky.

2. **Vedení nakrátko, $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{0}$**

$$\mathbf{Z}_{vstk} = jR_v tg(2\pi \frac{l}{\lambda}) \quad (6.4\text{-}17)$$

   Vstupní impedance je čistě imaginární. Pro $0<l<\lambda/4$ je čistě induktivní, pro $\lambda/4<l<\lambda/2$ je



Obrázek 6.4.3 Vstupní impedance vedení nakrátko

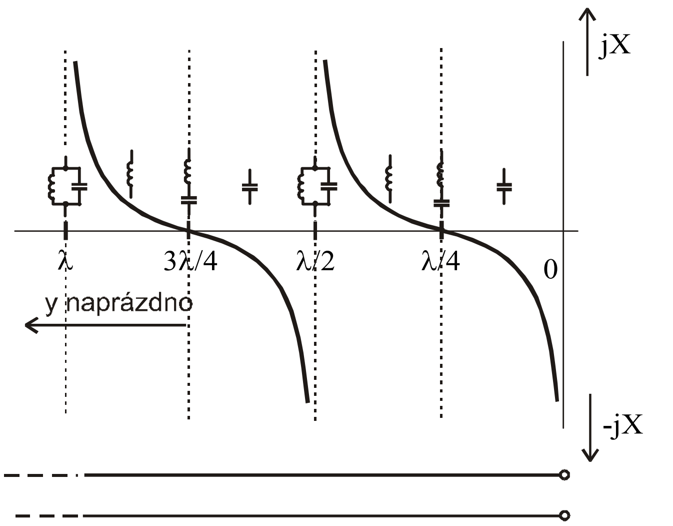
čistě kapacitní atd. (viz obr.6.4-3).

Je-li délka vedení rovna lichým násobkům $\lambda/4$ je vstupní impedance nekonečně veliká (vedení se chová jako paralelní rezonanční okruh v rezonanci), je-li délka rovna sudým násobkům $\lambda/4$, je vstupní impedance rovna nule (vedení se chová jako sériový rezonanční okruh v rezonanci).

3. Vedení naprázdno, $\mathbf{Z}_2 \to \infty$

$$\mathbf{Z}_{vst0} = -jR_v \cot g(2\pi \frac{l}{\lambda}), \qquad \mathbf{Y}_{vst0} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{vstk}} = j\frac{1}{R_v} tg(2\pi \frac{l}{\lambda}) \quad . \tag{6.4-18}$$

Průběh impedance v závislosti na délce vedení ukazuje obr.6.4-4. Situace je podobná jako u vedení nakrátko, prodlouženého o *λ/4*.



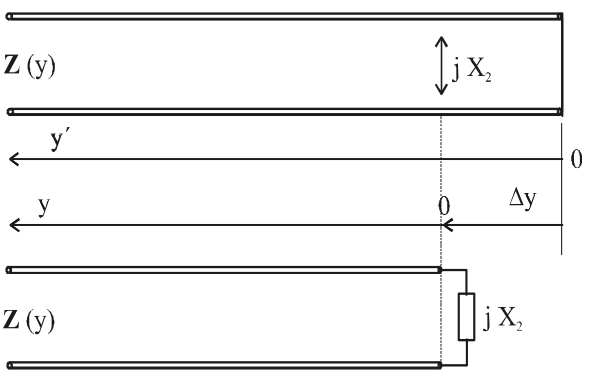
Obrázek 6.4.4 Vedení zakončené naprázdno

4. Vedení zatížené reaktancí

Na obr.6.4-5 je nakresleno vedení nakrátko (uvažujeme bezeztrátové vedení s reálnou charakteristickou impedancí). Nahradíme-li jeho odřezek délky *Δy* odpovídající reaktancí

$$j\mathbf{X}_2 = j\,\mathbf{Z}_v tg\alpha\,\Delta y\,, \tag{6.4-19}$$

jeho vstupní impedance ***Z(y')*** se nezmění. Pro souřadnice podle obrázku platí



Obrázek 6.4.5 K impedanci vedení zakončeného reaktancí

y' = y + Δy a impedance je

$$\mathbf{Z}(y) = j\mathbf{Z}_v tg\alpha\, y' = j\mathbf{Z}_v tg\alpha(y + \Delta y)\,.$$

Reaktanční zátěž je proto, pokud jde o vstupní impedanci vedení, ekvivalentní prodloužení resp. zkrácení vedení o

$$\Delta y = arctg\frac{X_2}{\mathbf{Z}_v}. \qquad (6.4\text{-}20)$$

Znaménko Δy závisí na znaménku reaktance X_2. Induktivní zátěž proto efektivní délku vedení prodlužuje, kapacitní zátěž zkracuje.

5. Vedení délky *λ/2*

Má-li vedení délku rovnou celistvému násobku poloviční vlnové délky, $l=k\lambda/2$, je jeho vstupní impedance rovna impedanci zatěžovací

$$\mathbf{Z}_{vst} = \mathbf{Z}_2. \qquad (6.4\text{-}21)$$

Plyne to ze vztahu (6.4-16). Vedení transformuje zatěžovací impedanci na vstupní svorky bez ohledu na její velikost v poměru *1:1*. Této vlastnosti vedení lze využít při měření impedance vzdálených objektů, např. antén.

6. Vedení délky *λ/4*

Pro vstupní impedanci vedení délky *λ/4* dostaneme úpravou vztahu (6.4-16)

$$\mathbf{Z}_{vst} = \mathbf{Z}_2 \frac{\dfrac{1}{tg\dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{\lambda}{4}} + j\dfrac{\mathbf{Z}_v}{\mathbf{Z}_2}}{\dfrac{1}{tg\dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{\lambda}{4}} + j\dfrac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_v}} = \frac{\mathbf{Z}_v^{\ 2}}{\mathbf{Z}_v}\ .$$

Platí tedy

$$\mathbf{Z}_{vst}\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_v^{\ 2}, \qquad (6.4\text{-}22)$$

vedení pracuje jako impedanční invertor (podobně jako gyrátor). Transformační převod mezi impedancemi $\boldsymbol{Z}_2$ a $\boldsymbol{Z}_{vst}$ je dán vlnovou impedancí a lze jej proto nastavit geometrickými rozměry vedení.

Poznámka ke vstupní impedanci krátkého vedení

Je-li $l \ll \lambda/4$, hovoříme o **krátkém vedení**. Výrazy pro vstupní impedanci nakrátko a vstupní admitanci naprázdno můžeme pak zjednodušit použitím prvního členu v Taylorově rozvoji pro funkci $tg(2\pi\frac{l}{\lambda})$.

Vstupní impedance nakrátko je pak přibližně

$$\mathbf{Z}_{vstk} \doteq jR_v 2\pi \frac{l}{\lambda} = jR_v \alpha\, l = j\omega \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{L_0 C_0}\,.l = j\omega\, L_0 .l\,. \qquad (6.4\text{-}23)$$

Vedení představuje indukčnost $L_0 l$. Podobně vstupní admitance naprázdno

$$\mathbf{Y}_{vst0} \doteq j\omega C_0 .l\,, \qquad (6.4\text{-}24)$$

vedení se chová jako soustředěná kapacita $C_0 l$.

Tyto výsledky umožňují určit primární parametry L_0 a C_0 měřením indukčnosti krátkého úseku vedení nakrátko a kapacity naprázdno. Měření se musí uskutečnit na dostatečně nízkých kmitočtech. Měříme-li například na kmitočtu *1 MHz,* kterému odpovídá vlnová délka přibližně 300 m, vezmeme úsek vedení o délce nejvýše několika metrů a tím splníme podmínku $l << \lambda/4$.

Ze získaných hodnot L_0 a C_0 pak vypočítáme vlnový odpor $R_v = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ a měrné zpoždění $\tau = \frac{\alpha}{\omega} = \sqrt{L_0 C_0}$.

6.4.3 Shrnutí k podkapitole 6.4

Řešením telegrafních rovnic (parciální diferenciální rovnice pro fázory napětí a proudu) pro harmonický ustálený stav jsou fázory napětí $\mathbf{U}(x, j\omega)$ a proudu $\mathbf{I}(x, j\omega)$ představující **harmonickou postupnou a odraženou vlnu**, jejíž délka na vedení je $\lambda = vT = \frac{\omega T}{\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha}$. Okamžitá hodnota napětí (a proudu) na vedení je v každém místě vedení dána superpozicí postupných a odražených vln. Jejich amplitudy určíme pomocí fázorů napětí (a proudu) $\mathbf{U}(x, j\omega) = \mathbf{U}_P(j\omega)e^{-\gamma x} + \mathbf{U}_O(j\omega)e^{\gamma x}$, které závisejí na **sekundárních parametrech vedení** - konstantě šíření γ (jω) a charakteristické impedanci $\mathbf{Z}_V$(jω) :

$$\gamma(j\omega) = \beta + j\,\alpha = \sqrt{(R_0 + j\omega\, L_0)(G_0 + j\omega\, C_0)} \quad , \qquad \mathbf{Z}_v(j\omega) = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega\, L_0}{G_0 + j\omega\, C_0}}\,.$$

Amplituda odražených vln závisí na **činiteli odrazu** ρ ($U_2 = U_1 .\rho$).

Při bezeztrátovém vedení ($R_0 = 0$, $G_0 = 0$) má vedení měrný útlum β nulový, charakteristická impedance přechází na reálný vlnový odpor R_V a na vedení jsou harmonické vlny netlumené. Při ztrátovém vedení jsou harmonické vlny tlumené (amplitudy kmitů exponenciálně klesají).

Superpozicí postupné a odražené vlny vznikají na vedení **stojaté vlny .** Velikost stojatých vln je mírou nepřizpůsobení vedení k zátěži. Je-li vedení nekonečně dlouhé, nebo přizpůsobené (odpor zátěže se rovná charakteristické impedanci vedení), k odrazům na konci vedení nedochází a na vedení je pouze vlna postupná.

Vstupní impedance (bezeztrátového) vedení závisí na zatěžovací impedanci, vlnovém odporu vedení R_v a na poměru délky vedení k délce vlny na vedení. Pro bezeztrátové **vedení nakrátko** je vstupní impedance $\mathbf{Z}_{vstk} = jR_v tg(2\pi \frac{l}{\lambda})$, při **vedení naprázdno** $\mathbf{Z}_{vst0} = -jR_v \cot g(2\pi \frac{l}{\lambda})$, je tedy čistě imaginární.. Podle délky vedení může mít tedy vedení jak naprázdno, tak i nakrátko vstupní impedanci jak nulovou , tak i nekonečnou, obvod se v závislosti na délce vedení a druhu zakončení může chovat jako paralelní, nebo rezonanční obvod s rozprostřenými parametry.

Vedení délky λ/2 transformuje jakoukoliv zatěžovací impedanci na vstup $\mathbf{Z}_{vst} = \mathbf{Z}_2$, vedení délky λ/4 se chová jako impedanční konvertor $Z_{VST} = Z_V^2 / Z_2$.

6.4.4 Kontrolní otázky a příklady k podkapitole 6.4

Příklad 6.4 –1

Jaké hodnoty nabývá činitel odrazu ρ pro :

a) $\mathbf{Z}_2 = 0$, b) $\mathbf{Z}_2 = \infty$,c) $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_V$

Příklad 6.4 –2

Defnujte primární a sekundární parametry vedení.

Příklad 6.4 –3

Homogenní vedení s primárními parametry $G_0 = 0$ [S/m], $R_0 = 55$ [mΩ/m],

$C_0 = 100$ [pF/m], $L_0 = 0{,}25$ [μH /m] o délce l = 50 m pracuje na kmitočtu

f =250 MHz , je zatíženo vlnovou impedancí $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_V$.

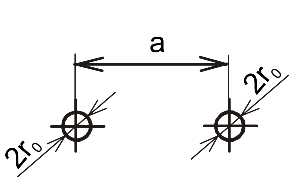
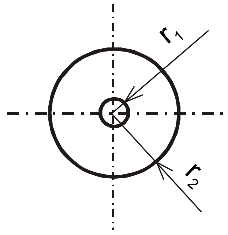
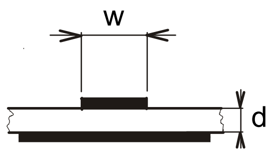
Vypočtěte : a) sekundární parametry vedení (γ, $\mathbf{Z}_V$), délku vlny na vedení λ ,

b) vstupní napětí a vstupní proud, je-li napětí na výstupu

$u_2(t) = U_{2m}\sin(\omega t+\psi_u) = \sqrt{2}\ .\ 50 \sin(\omega t)$ [V]

6.5 Parametry typických vedení

V následující tabulce jsou uvedeny přibližné vztahy pro výpočet primárních parametrů C_0 a L_0 a vlnového odporu R_v tří typických provedení bezeztrátových přenosových vedení. Ve všech případech jsou tyto parametry závislé na geometrických rozměrech vedení a na vlastnosti prostředí, charakterizovaných permitivitou ε a permeabilitou μ.

typ vedení	dvojvodičové vedení	koaxiální kabel	plošný spoj
			
kapacita C_0	$\dfrac{\pi\,\varepsilon}{\ln(a/r_0)}$	$\dfrac{2\pi\,\varepsilon}{\ln(r_2/r_1)}$	$\dfrac{\pi\,\varepsilon}{\ln(2d/w)}$
indukčnost L_0	$(\mu/\pi)\ \ln(a/r_0)$	$(\mu/2\pi)\ \ln(r_2/r_1)$	$(\mu/\pi)\ \ln(2d/w)$
vlnový odpor R_0	$(1/\pi)\sqrt{(\mu/\varepsilon)}\ \ln(a/r_0)$	$(1/2\pi)\sqrt{(\mu/\varepsilon)}\ \ln(r_2/r_1)$	$(1/\pi)\sqrt{(\mu/\varepsilon)}\ \ln(2d/w)$

tabulka 6.5-1 Vzorce pro primární parametry C_0, L_0 a vlnový odpor R_0 tří typických přenosových vedení

Typické hodnoty vlnového odporu jsou pro dvojvodičová vedení ve vzduchu 200 až 300 Ω, pro koaxiální kabelová vedení a tištěné spoje na desce 30 až 100 Ω. Rychlost šíření vln podél vedení je ve všech případech rovna přibližně

$$v \doteq \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}\,, \qquad (6.5\text{-}1)$$

kde

c=300000 km/s je rychlost světla ve vakuu,

ε_r a μ_r jsou relativní permitivita a permeabilita prostředí mezi vodiči.

Proto u vedení se vzduchovým dielektrikem se rychlost šíření blíží rychlosti světla, avšak u kabelů s pevným dielektrikem a u desek s plošnými spoji klesá často na pouhé dvě třetiny až polovinu této hodnoty.

7 Dodatky

7.1 Výsledky testů

7.1.1 Vstupní test

Příklad 2.2-1

Vypočtěte x :

a) x = sin (25°), b) x=sin (1,25) ,c) x= cos(35°), d) x=sin(- 30°), e) x= cos (132°)

a) x = 0,4226 b) x = 0,9320 , c) x = 0,8192, d) x = -0,5 , e) x = -0,6691

Příklad 2.2-2

Vypočtěte α :

a) 0,25 = sinα , b) 0,8 = cosα c) –0,9 = cosα , d) –0,6 = sinα , e) –0,2 = cosα

a) α = 14,48° (165,52°) b) α = 36,87° (-36,87 °), c) α = 154,16°(205,84°),

d) α = -36,87° (216,87°) , e) α= 101,54 °(258,46°)

Příklad 2.2-3

Vypočtěte derivace funkcí:

a) y = sin x, b) y = cos x ,c) y = e^x , d) y = e^{ax}, e) y = $2x^3$, f) y = ax^{n+1}

a) y' = cos x, b) y' = - sin x ,c) y' = e^x , d) y' = ae^{ax}, e) y' = $6x^2$, f) y' = ax^{n-1}

Příklad 2.2-4

Vypočtěte neurčitý integrál funkcí:

a) y = sin x, b) y = cos x ,c) y = e^x , d) y = e^{2x-1}, e) y = $2x^3$, f) y = e^{ax+b}

a) $\int y$ = - cos x +C, b) $\int y$ = sin x + C ,c) $\int y$ = e^x +C , d) $\int y = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$,

e) $\int y = \frac{1}{2} x^4 + C$, f) $\int y = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

Příklad 2.2-5

a) Definujte číslo e , vyčíslete jeho hodnotu ,b) definujte imaginární jednotku j , c) doplňte Eulerův vztah e^{jx} =

a) $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, e = 2,7183… b) $j = \sqrt{-1}$, $e^{jx} = \cos x + j\sin x$

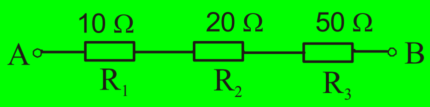
Příklad 2.2-6

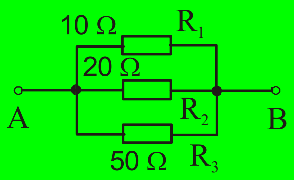
Komplexní číslo **A** = 2 +j3 převeďte: a) do exponenciálního, b) do goniometrického tvaru

A = 2 +j3 =3,6056 $e^{j56,31°}$ = 3,6056 [cos(56,31 °) + j sin (56,31 °)]

Příklad 2.2-7

a) Nahraďte v obrázcích větve mezi uzly A a B jedním rezistorem, vypočtěte jejich hodnoty

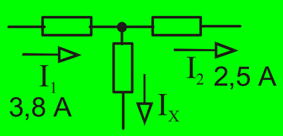


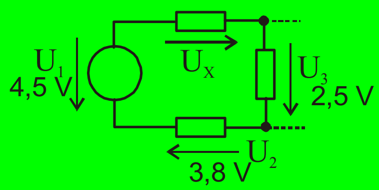


R_s= 80 Ω , R_P =5,8823 Ω

Příklad 2.2-8

a) V obvodech na obrázku vypočtěte pomocí I.Kirchhoffova zákona proud Ix, pomocí II. Kirchhoffova zákona napětí Ux :

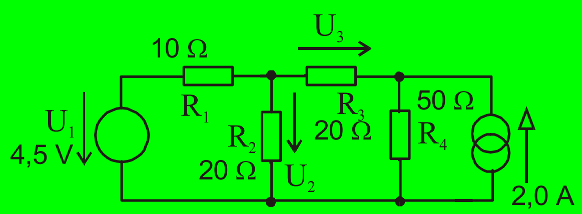




I_X =1,3 A U_X = - 5,8 V

Příklad 2.2-9

a) V obvodu na obrázku vypočtěte napětí U_2 a U_3 metodou smyčkových proudů i metodou uzlových napětí



U_2 =11,4348 V U_3 = -25,3043 V

Příklad 2.2-10

a) Efektivní hodnota napětí je U=230 V, jaká je hodnota amplitudy U_m ?

b) Amplituda proudu je I_m =0,5 A, jaká je efektivní hodnota proudu I ?

a) U_m = 325,2691 [V] , I = 0,3536 [A]

Příklad 2.2-11

Vypočtěte x :

a) $x^2 + 2x - 6 = 0$, b) $2{,}2x^2 + 5{,}3x + 3 = 0$

a) x_1 = - 3,6458 , x_2 = 1,6457 ,b) x_1 = - 1,5 , x_2 = -0,9091

Příklad 2.2-12

Vypočtěte y :

a) $y = e^{0,35}$, b) $y = e^{-0,45}$, c) $0{,}6065 = e^y$

a) y = 1,4191 , b) y = 0,6376, c) y = - 0,5

Příklad 2.2-14

Vypočtěte parciální derivace :

a) $\frac{\partial}{\partial t}\left[ax^2 + t^2\right]$, b) $\frac{\partial}{\partial x}\left[ax^2 + bt^2\right]$, c) $\frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2 t + 3t^2\right]$, d) $\frac{\partial}{\partial t}\left[2x^2 t + 5t^2\right]$

a) 2t , b) $2ax^2$, c) 4xt , c) $2x^2$+10t

7.1.2 Kapitola 3

7.1.2.1 Test předchozích znalostí :

Příklad 3 - 1

Komplexní číslo **A** = 5 +j3 převeďte: a) do exponenciálního, b) do goniometrického tvaru

A = 5 +j3 =5,8309 $e^{j30,96°}$ = 5,8309 [cos(30,96 °) + j sin (30,96 °)]

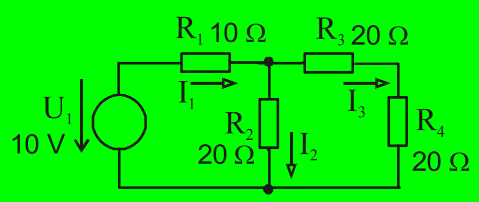
Příklad 3 - 2

Komplexní číslo **B** = 15 $e^{j40°}$ převeďte: a) do složkového, b) do goniometrického tvaru

B= 11,4907 +j9,6418 = 15 [cos(40 °) + j sin (40 °)]

Příklad 3 - 3

a) V obvodu na obrázku vypočtěte proudy I_1, I_2 a I_3 metodou zjednodušování a metodou úměrných veličin



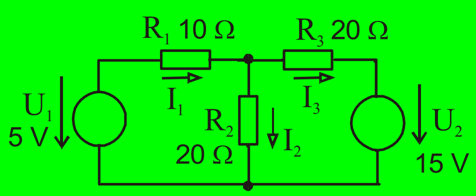
I_1 = 0,4286 A

I_2 = 0,2857 A

I_3 = 0,1429 A

Příklad 3 - 4

a) V obvodu na obrázku vypočtěte proudy I_1, I_2 a I_3 metodou smyčkových proudů



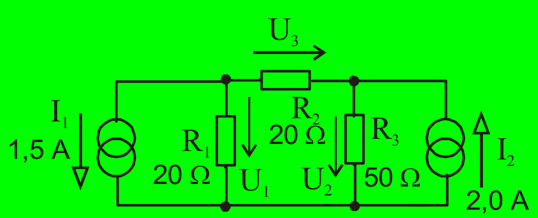
I_1 = -0,125 A

I_2 = 0,3125 A

I_3 = -0,4375 A

Příklad 3 - 5

a) V obvodu na obrázku vypočtěte napětí U_1,U_2 a U_3 metodou uzlových napětí



U_1 = -1,1111 V

U_2 = 27,7777 V

U3 = -28,8888 V

7.1.2.2 Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 3.3

Příklad 3.3 –3:

Převeďte fázory napětí a proudu do polárního tvaru:

a) $\mathbf{U_1} = 5+j6 = 7{,}8102\ e^{j50{,}19°}$ [V], b) $\mathbf{U_2} = 4{,}3 - j2{,}8 = 5{,}1313\ e^{-j33{,}07°}$ [V],
c) $\mathbf{I_1} = 10{,}5 + j\ 4{,}8 = 11{,}5451\ e^{j24{,}57°}$ [A], d) $\mathbf{I_2} = 2{,}3 - j\ 1{,}5 = 2{,}7459\ e^{-j33{,}11°}$ [A]

Příklad 3.3 –4:

Převeďte fázory napětí a proudu do složkového tvaru:

a) $\mathbf{U_1} = 5{,}6\ e^{j0{,}25} = 5{,}4260+j1{,}3851$ [V], b) $\mathbf{U_2} = 20\angle 50° = 12{,}8558+j15{,}3209$ [V],
c) $\mathbf{I_1} = 4{,}2\ \angle 90° = 0+j4{,}2$ [A], d) $\mathbf{I_2} = 2{,}5\ \angle -35° = 2{,}0479-j1{,}4339$ [A]

Příklad 3.3 –5:

Vyjádřete harmonické napětí s časovými průběhy $u\,(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$,

pro $u_1(t) = 50\sin\,(314\ t + 0{,}2)$ *[V]* a $u_2\,(t) = 20\ \sin\,(314\ t + 0{,}8)$ *[V]* pomocí fázorů a najděte časový průběh rozdílového napětí.

$\mathbf{U_1} = 50\ e^{j0{,}2} = 49{,}0033+j9{,}9334$ [V], $\mathbf{U_2} = 20e^{\,j0{,}8} = 13{,}9341+j14{,}3471$ [V],

$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 = 49{,}0033+j9{,}9334 - (13{,}9341+j14{,}3471) = 35{,}0989 - j4{,}4137$ [V].

Příklad 3.3 –6:

Časový průběh proudu cívky o indukčnosti L =2H je dán vztahem

i(t) = $I_m \sin(\omega t + \psi) = 0{,}5\sin(314\,t - 0{,}2)$ [A] . Určete časový průběh napětí na cívce, je-li obvod v harmonickém ustáleném stavu.

Rotující fázor (komplexor) proudu je **i** (t) = $I_m\, e^{j(\omega t+\psi)} = 0{,}2\,e^{j(314\,t-0{,}3)}$ [A] .

Napětí indukované na cívce je možno psát $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$. V souladu se vztahem (3.3 – 24) můžeme komplexor napětí vyjádřit jako

$$\mathbf{u}(t) = L\frac{d}{dt}\,\mathbf{i}\,(t) = L\frac{d}{dt}\,[\,I_m\,e^{j(\omega t+\psi)}\,] = L\frac{d}{dt}\,[\,0{,}2\,e^{j(314\,t-0{,}3)}\,] = j\omega L\ \mathbf{i}\,(t) =$$

$$= j\ 314.\ 0{,}2\,e^{j(314\,t-0{,}3)} = j\ 62{,}8.\,e^{j(314\,t-0{,}3)} = 62{,}8.\,e^{j(314\,t-0{,}3+\pi/2)} = 62{,}8.\,e^{j(314\,t+1{,}27)}.$$

Časový průběh napětí indukovaného na cívce je tedy

$$u\,(t) = \mathrm{Im}\{\mathbf{u}(t)\} = U_m \sin(\omega t + \psi) = 62{,}8\ \sin\,(314\ t + 1{,}27)\ \ [V]\ .$$

7.1.2.3 Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 3.5

Příklad 3.5 –2:

Určete impedanci kapacitoru o kapacitě 1 μF a impedanci induktoru o indukčnosti 0,1 H při kmitočtu 500 Hz.

Pro f= 500 Hz: $\mathbf{Z_L} = j\omega L = j.2.\pi.500\ .\ 0{,}1 = j\ 314{,}1593$ *[Ω]*

$\mathbf{Z}_C$= 1/ (jωC)= j /(j2.π.500) = -j 31,8310 *[Ω]*

7.1.2.4 Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 3.6

Příklad 3.6 –2:

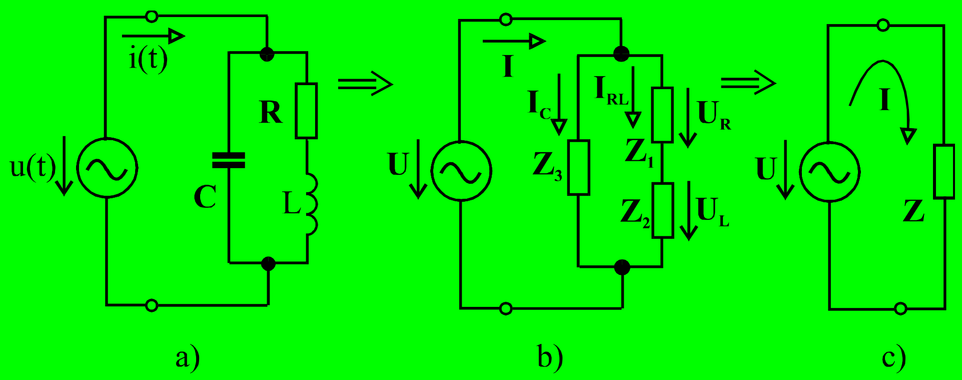
Určete maximální možný činný výkon, který může dodat zdroj harmonického napětí $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ = 325 sin (314t) [V] o vnitřní impedanci $\mathbf{Z}_i$ = 120 +j 10 [Ω] do zátěže **Z**.

Pro splnění podmínky maximálního výkonu $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_i^*$ musí být zatěžovací impedance :

$R = R_i = 120$ [Ω], $X = -X_i = -j\,10$ [Ω], tedy **Z** =120 – j10 [Ω].

Efektivní hodnota napětí zdroje je $U_i = U_{im}/\sqrt{2}$ = 325/$\sqrt{2}$ = 229,81 [V] ,

a maximální výkon dodaný do zátěže $P_{max} = \dfrac{U_i^2}{4R_i}$ = 229,81^2 /(4.120) = 110,026 [W].



Obrázek 7.1.1 K příkladu 3.6 - 2

Ad a) **U** = 230. e^{j0} = 230 [V], $\mathbf{Z}_1$ = R = 120 [Ω], $\mathbf{Z}_2$ = jωL=j 2πf.L = j 157,0796 [Ω],

$\mathbf{Z}_3$ =1/(jωC)= 1/(j 2π.50.5.10^{-6}) = -j 636,6198 [Ω].

$\mathbf{Z}_{12}$ = $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$ = R + jωL=120 + j 157,0796 = 197,6715. $e^{j0,9184}$ [Ω].

$$\mathbf{Z}_{123} = \frac{\mathbf{Z}_{12}.\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{Z}_3} = \frac{-\,j\,636{,}6198\ .197{,}6715.e^{j0{,}9184}}{120 + j157{,}0796 - j\,636{,}6198} = 254{,}5717\ e^{j0{,}6732}\ [\Omega].$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = \frac{230}{254{,}5717.e^{j0{,}6732}} = 0{,}9035.\ e^{-j0{,}6732}\ [A],$$

amplituda je tedy

$I_m = \sqrt{2}$. I = $\sqrt{2}$ .0,9035 = 1,2777 [A] , fázový úhel ψ_i = - 0,6732 [rad] , okamžitá hodnota proudu je

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 1{,}2777 \sin(100\pi t - 0{,}6732)\ [A]$$

Ad b)

$\boldsymbol{S} = \mathbf{U}.\mathbf{I}^*$ = 230 . 0,9035 $e^{j0,6732}$ = 207, 8000. $e^{j0,6732}$ = 162, 4609 + j129,5657 [VA]

$P = Re\{\mathbf{S}\} = 162,4609$ [W], $Q = Im\{\mathbf{S}\} = 129,5657$ [var], $S = |\mathbf{S}| = 207,8000$ [VA],
$\cos\varphi = P/S = 0,7818$.

Ad c)

C =12,7962 [μ F], $\mathbf{Z_3} = 1/(j\omega C) = 1/(j\,2\pi.50.\;12,7962\;10^{-6}) = -j\,248,7534$ [Ω].

$$\mathbf{Z}_{123} = \frac{\mathbf{Z}_{12}.\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{Z}_3} = \frac{-j\,248,7534\;\;.197,6715.\,e^{j0,9184}}{120 + j157,0796 - j\,248,7534} = 325,6168\;e^{j0} = 325,6168\;[\Omega].$$

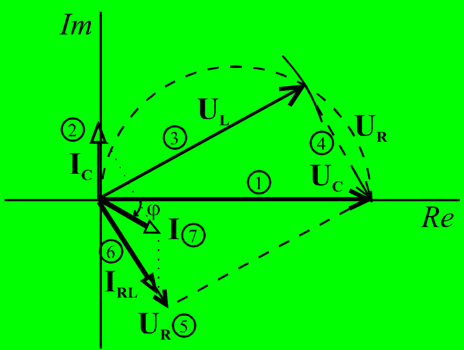
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = \frac{230}{325,6168} = 0,7064\;[A],$$ amplituda je tedy

$I_m = \sqrt{2}\,.\,I = \sqrt{2}\,.0,7064 = 0,9989$ [A] , fázový úhel $\psi_i = 0$ [rad] ,

okamžitá hodnota proudu je

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 0,9989\;\sin(100\pi t)\;\;[A]$$

$\boldsymbol{S} = P = U.\,I = 230\,.\,0,9989 = 162,4609$ [W], $Q = 0$ [var], $\cos\varphi = 1$.



Fázorový diagram pro uvedený obvod s naznačeným postupem konstrukce dokresluje fázové poměry mezi jednotlivými veličinami. (Při konstrukci diagramu je třeba respektovat fázové poměry mezi napětím a proudem jednotlivých prvků v souladu s poznatky předchozího odstavce 3.4., moduly jednotlivých fázorů je třeba vynášet v určitém zvoleném měřítku.)

Poznámka:
Numerické hodnoty mezivýsledků jsou uváděny ve výše uvedeném příkladě zaokrouhlené, v navazujících výpočtech jsou však používány vždy hodnoty mezivýsledků s plnou přesností.

7.1.2.5 Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 3.8

Příklad 3.8-1:

Na vstup integračního RC článku (R=100 Ω, C=100 nF) je přiváděno harmonické napětí o amplitudě 1 V : $u_1(t) = U_m \sin(\omega t) = 1 \sin(\omega t)$ [V]. Určete oblast práce článku a výstupní napětí článku $u_2(t)$ pro kmitočty a) f =160 Hz, b) f =1600 Hz, c) f = 16 000 Hz.

a) f =160 Hz : $\mathbf{U_2} = 0,9950\;e^{-j5,7\,°}$, $u_2(t) = 0,9950 \sin(\omega t - 5,7^{\circ})°$, oblast přenosu,

b) f =1600 Hz : $\mathbf{U_2} = 0,7052\;e^{-j45,1\,°}$, $u_2(t) = 0,7052 \sin(\omega t - 45,1^{\circ})°$, oblast mezního kmitočtu,

a) f =16000 Hz : $\mathbf{U_2} = 0,0990\;e^{-j84,3\,°}$, $u_2(t) = 0,0990 \sin(\omega t - 84,3^{\circ})°$, oblast integrace.

Příklad 3.8-2:

Na vstup derivačního CR článku (R=100 Ω, C=100 nF) je přiváděno harmonické napětí o amplitudě 1 V : $u_1(t) = U_m \sin(\omega t) = 1 \sin(\omega t)$ [V]. Určete oblast práce článku a výstupní napětí článku $u_2(t)$ pro kmitočty a) f =160 Hz, b) f =1600 Hz, c) f = 16 000 Hz.

a) f =160 Hz : $\mathbf{U_2}=0{,}100\, e^{j84{,}3^\circ}$, $u_2(t) = 0{,}100 \sin(\omega t + 84{,}3^\circ)°$, oblast derivace,

b) f =1600 Hz : $\mathbf{U_2}=0{,}7090\, e^{j44{,}8^\circ}$, $u_2(t) = 0{,}7090 \sin(\omega t + 44{,}8^\circ)°$, oblast mezního kmitočtu,

a) f =16000 Hz : $\mathbf{U_2}=0{,}9951\, e^{j5{,}7^\circ}$, $u_2(t) = 0{,}9951 \sin(\omega t + 5{,}7^\circ)°$, oblast přenosu.

Příklad 3.8-3:

Na vstup sériového RLC obvodu (R=10 Ω, L= 1 mH, C=100 nF) je přiváděno harmonické napětí o amplitudě 1 V : $u_1(t) = U_m \sin(\omega t) = 1 \sin(\omega t)$ [V]. Určete rezonanční kmitočet obvodu f_0, proud obvodem a napětí na jednotlivých prvcích obvodu pro kmitočty a) f=15,9155kHz, b) f=159 kHz, c) f= 1,59 kHz.

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 15{,}9155\ kHz\ , \qquad \mathbf{I}(j\omega) = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}(j\omega)} = \mathbf{U}\frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

$$\mathbf{U_R} = R.\mathbf{I}\,,\ \ \mathbf{U_L} = j\omega L.\mathbf{I}\ ,\ \ \mathbf{U_C} = -j\frac{1}{\omega C}.\mathbf{I}$$

ad a) f=15,9155kHz : $\mathbf{I}=0{,}1\, e^{j0^\circ}$ [A], $\mathbf{U_R}=1{,}0\, e^{j0^\circ}$[V], $\mathbf{U_L}=10{,}0\, e^{j90^\circ}$[V], $\mathbf{U_C}=10{,}0\, e^{-j90^\circ}$[V],

ad b) f=159kHz : $\mathbf{I}=0{,}001\, e^{-j89{,}4^\circ}$ [A], $\mathbf{U_R}=0{,}010\, e^{-j89{,}4^\circ}$ [V], $\mathbf{U_L}=1{,}01\, e^{j0{,}6^\circ}$[V],
$\mathbf{U_C}=0{,}01\, e^{-j179{,}4^\circ}$[V],

ad c) f=1,59kHz : $\mathbf{I}=0{,}001\, e^{j89{,}4^\circ}$ [A], $\mathbf{U_R}=0{,}01\, e^{j89{,}4^\circ}$[V], $\mathbf{U_L}=0{,}01 e^{j179{,}4^\circ}$[V],
$\mathbf{U_C}=1{,}01\, e^{-j0{,}6^\circ}$[V].

7.1.3 Kapitola 4

7.1.3.1 Test předchozích znalostí:

Příklad 4-1

a) Efektivní hodnota napětí je U=150 V, jaká je hodnota amplitudy U_m ?

b) Amplituda proudu je I_m =2,5 A, jaká je efektivní hodnota proudu I ?

a) U=150,0 [V], $U_m = \sqrt{2}\ .150 = 212{,}1320$ [V],

b) I_m =2,5 [A], I= $(1/\sqrt{2}\,)$ .2,5=1,7678 [A].

Příklad 4-2

Okamžitá hodnota napětí je

$u(t) = U_m \sin(\omega tt + \varphi) = 325 \sin(314{,}1593\, t + 2{,}095)$,vyjádřete fázor tohoto napětí v měřítku amplitud a v měřítku efektivních hodnot.

$\mathbf{U}_m$ =325 e ^{j2,095} = 325 e$^{j120,03°}$ =325 $\angle$ 120,03° [V],

U =229,81 e ^{j2,095} = 229,81 e$^{j120,03°}$ =229,81 $\angle$ 120,03° [V].

Příklad 4-3

a) Fázory napětí jsou : $\mathbf{U}_1$=120 e$^{j30°}$ [V], $\mathbf{U}_2$=80 e$^{j20°}$ [V] . Určete jejich součet a rozdíl.

b) Fázor proudu tekoucí impedancí **Z** = 10 +j30 [Ω] je **I**=1,2 e$^{j40°}$[A], vypočtěte fázor napětí na impedanci **U** a okamžitou hodnotu napětí u(t)

a) $\mathbf{U}_1$=120 e$^{j30°}$= 103,9230+j60,0 [V], $\mathbf{U}_2$=80 e$^{j20°}$=75,1754+j27,3616 [V],

$\mathbf{U}_1$ + $\mathbf{U}_2$ =103,9230+j60,0 +75,1754+j27,3616 =179,0984 +j 87,3616=

= 199,2694e$^{j26,00°}$ [V],

$\mathbf{U}_1$ - $\mathbf{U}_2$ =103,9230+j60,0 – (75,1754+j27,3616) =28,7476+j32,6384 =

= 43,4936e$^{j48,63°}$ [V].

b) **Z** = 10 +j30 = 31,6228 e$^{j71,56°}$, **U** = **Z** . **I** = 31,6228 e$^{j71,56°}$. 1,2 e$^{j40°}$ =

= 37,9474 e$^{j111,56°}$

7.1.3.2 Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 4.1

1. Jak je definován operátor natočení ?

$$\boldsymbol{a} = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Jak vyjádříme popis trojfázové soustavy(v symbolické formě) pomocí operátoru natočení ?

$$\boldsymbol{U}_U,\ \boldsymbol{U}_V = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{U}_U,\ \boldsymbol{U}_W = \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{U}_U\ .$$

3. Odvoďte vztah mezi fázorem sdruženého napětí a fázového napětí.

$$\mathbf{U}_{UV} = \mathbf{U}_U - \mathbf{U}_V = \mathbf{U}_U - \mathbf{a}^2\mathbf{U}_U = \mathbf{U}_U(1-\mathbf{a}) = \sqrt{3}\mathbf{U}_U e^{j30°}$$

4. Nakreslete nejčastěji používané zapojení zdrojů trojfázové soustavy .

Viz obr.4.1-6 a obr. 4.1-8

Příklad 4.1-1:

Dokažte, že pro operátor natočení **a** platí : $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}+1=0$.

$$\boldsymbol{a} = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \boldsymbol{a}^2 = e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}+1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0 + j0 \quad !\ \text{cbd.}$$

7.1.3.3 Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 4.2

1. Jak určíte komplexní, činný, jalový a zdánlivý výkon trojfázového spotřebiče ?
   Komplexní výkon odebíraný spotřebičem je

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_U + \mathbf{S}_V + \mathbf{S}_W = \mathbf{U}_{UV}\mathbf{I}^*{}_U + \mathbf{U}_{VW}\mathbf{I}^*{}_V + \mathbf{U}_{WU}\mathbf{I}^*{}_W$$

   odkud činný, jalový a zdánlivý výkon :

$$P = \mathrm{Re}[S] = P_U + P_V + P_W,$$
$$Q = \mathrm{Im}[S] = Q_U + Q_V + Q_W,$$
$$S = |S|.$$

2. Jaký je poměr ztrát mezi jednofázovou (dvouvodičovou) soustavou a trojfázovou soustavou při shodných ztrátách vedení ?
   Ztráty při trojfázovém přenosu jsou **poloviční** než ztráty při jednofázovém přenosu (viz příklad 4.2-1).

3. Proč v praxi používáme přepnutí zátěže ze zapojení hvězda na trojúhelník ?
   Pro omezení rozběhového proudu motorů, neboť spotřebič má při zapojení do hvězdy třikrát menší výkon než při zapojení do trojúhelníka.

Příklad 4.2-3:

Spotřebič je zapojen do hvězdy ,impedance $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3$ =(10 + j 25)Ω.
Je napájen souměrným zdrojem o sdružených napětích U_S = 380 V. ($\mathbf{U}_{UV}$= 380 e^{j0}, $\mathbf{U}_{VW}$ = 380 $e^{-j120\,o}$, $\mathbf{U}_{WU}$ = 380 $e^{j120\,o}$). Vypočtěte proudy impedancemi, celkový komplexní, činný, jalový a zdánlivý výkon spotřebiče.

Řešení:

a) řešení pro *souměrnou napájecí soustavu i zátěž*

$$\mathrm{U}_1 = \frac{\mathbf{U}_{UV}}{\sqrt{3}}e^{-j30^\circ} = 219.39\angle -30^\circ[V] = (190 - j109.70)\ V$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{Z}_1} = -1{,}1620 - j8{,}0648\ [A] = 8{,}1481\angle -98{,}20^\circ[A]$$

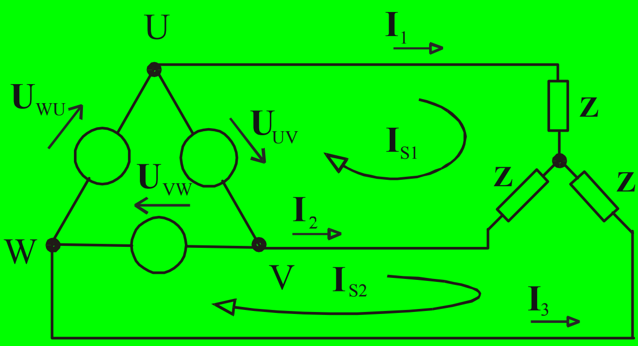
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{a}^2\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1 e^{-j120^\circ} = -6{,}4033 + j5{,}0387\ [A] = 8{,}1481\angle 141{,}80^\circ\ [A]$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{a}\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1 e^{j120^\circ} = 7{,}5653 + j3{,}261A = 8{,}1481\angle 21.80^\circ[A]$$

$$\mathbf{S} = 3\cdot\mathbf{S}_1 = 3\cdot\mathbf{U}_1\mathbf{I}_1^* = 3\cdot\mathbf{Z}_1 I_1^2 = 1991{,}7 + j4979{,}3\ [VA] = 5362{,}9\angle 68{,}20^\circ\ [VA]$$

$$P = \mathrm{Re}[\mathbf{S}] = 1991{,}7\ [W]\ ,\ Q = \mathrm{Im}[\mathbf{S}] = 4979{,}3\ [VAr]\ ,\ S = |\mathbf{S}| = 5362{,}9\ [VA]$$

b) řešení obecné -metodou smyčkových proudů $(\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z})$



$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{Z} & -\mathbf{Z} \\ -\mathbf{Z} & 2\mathbf{Z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{S1} \\ \mathbf{I}_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{UV} \\ \mathbf{U}_{VW} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 20+j50 & -10-j25 \\ -10-j25 & 20+j50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{S1} \\ \mathbf{I}_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 380\angle 0^\circ \\ 380\angle -120^\circ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{S1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13927{,}2 + j10959{,}1}{-1575 + j1500} = -1{,}1620 - j8{,}0648\ [A]$$

$$\mathbf{I}_{S2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{16454{,}5 - j6581{,}8}{-1575 + j1500} = -7{,}5653 - j3{,}0261\ [A]$$

$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{S1}$, $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{S2} - \mathbf{I}_{S1}$, $\mathbf{I}_3 = -\mathbf{I}_{S2}$

7.1.3.4 Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 4.3

1. Jaký proud protéká středním vodičem trojfázové (čtyřvodičové) soustavy v případě symetrického obvodu ? ($I_N = 0$)
2. Jaký proud protéká středním vodičem trojfázové (čtyřvodičové) soustavy v případě nesymetrického obvodu ? ($\mathbf{I}_U + \mathbf{I}_V + \mathbf{I}_W = \mathbf{I}_N$)

Příklad 4.3-3:

Analyzujte obvod tvořený trojfázovým zdrojem napětí o sdružených napětích U_{UV}, U_{VW}, U_{WU}, trojvodičovým vedením a trojfázovým spotřebičem spojeným a) do hvězdy, b) do trojúhelníka .

Řešení:

a) Podle druhého a prvního Kirchhoffova zákona dostáváme

$\mathbf{U}_U - \mathbf{U}_V = \mathbf{U}_{UV}$, $\mathbf{U}_V - \mathbf{U}_W = \mathbf{U}_{VW}$, $\mathbf{U}_W - \mathbf{U}_U = \mathbf{U}_{WU}$, $-\mathbf{I}_U - \mathbf{I}_V - \mathbf{I}_W = 0$.

Dále platí

$\mathbf{U}_U = \mathbf{Z}_U I_U$, $\mathbf{U}_V = \mathbf{Z}_V \mathbf{I}_V$, $\mathbf{U}_W = \mathbf{Z}_W \mathbf{I}_W$. Z těchto rovnic vypočítáme napětí na fázích spotřebiče:

$$\mathbf{U}_U = \frac{\mathbf{U}_{UV}\mathbf{Y}_V - \mathbf{U}_{VW}\mathbf{Y}_W}{\mathbf{Y}_U + \mathbf{Y}_V + \mathbf{Y}_W}, \qquad \mathbf{U}_V = \frac{\mathbf{U}_{VW}\mathbf{Y}_W - \mathbf{U}_{WU}\mathbf{Y}_U}{\mathbf{Y}_U + \mathbf{Y}_V + \mathbf{Y}_W},$$

$$\mathbf{U}_W = \frac{\mathbf{U}_{WU}\mathbf{Y}_U - \mathbf{U}_{UV}\mathbf{Y}_V}{\mathbf{Y}_U + \mathbf{Y}_V + \mathbf{Y}_W}.$$

Z rovnic pak určíme proudy ve fázích spotřebiče a ve vedení $\mathbf{I}_U, \mathbf{I}_V, \mathbf{I}_W$.

b) Na jednotlivých fázích spotřebiče jsou daná sdružená napětí

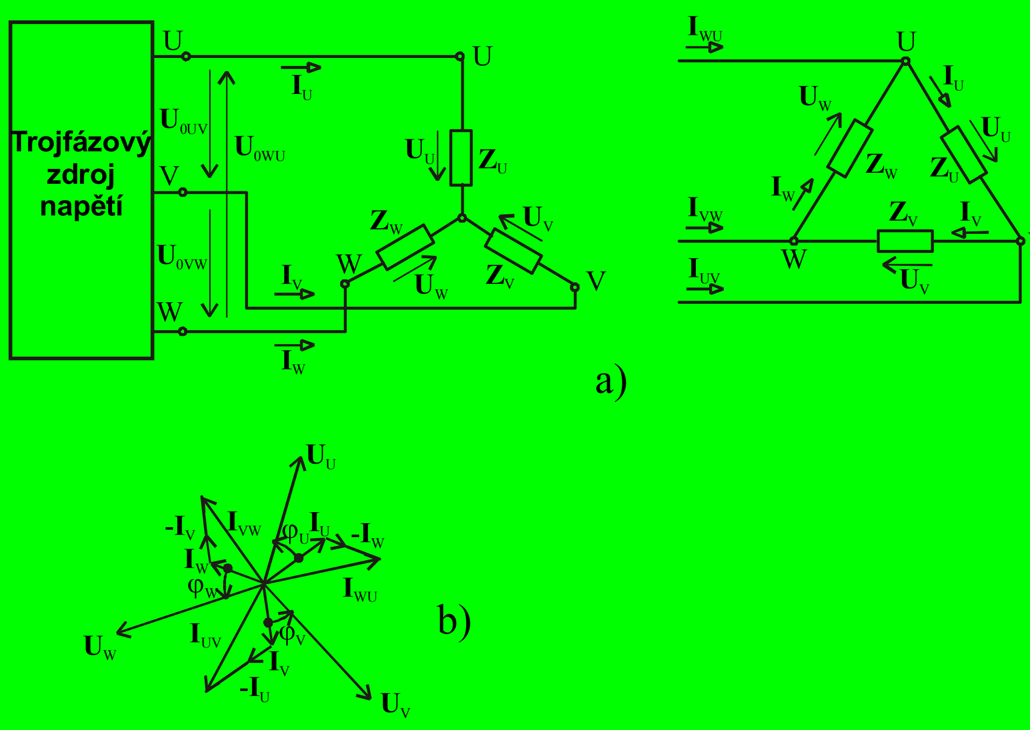
$$\mathbf{U}_U = \mathbf{U}_{UV},\ \mathbf{U}_V = \mathbf{U}_{0VW},\ \ \mathbf{U}_W = \mathbf{U}_{0WU}$$

a procházejí jimi proudy

$$\mathbf{I}_U = \mathbf{U}_U/\mathbf{Z}_U,\ \ \mathbf{I}_V = \mathbf{U}_V/\mathbf{Z}_V,\ \ \mathbf{I}_W = \mathbf{U}_W/\mathbf{Z}_W.$$

Proudy ve vedení určíme z prvního Kirchhoffova zákona pro uzly *U, V, W*

$$\mathbf{I}_{WU} = \mathbf{I}_U - \mathbf{I}_W,\ \mathbf{I}_{UV} = \mathbf{I}_V - \mathbf{I}_U,\ \mathbf{I}_{VW} = \mathbf{I}_W - \mathbf{I}_V.$$



Obrázek 7.1.2 K příkladu 4.3-3

7.1.3.5 <u>Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 4.4</u>

1. Na které složky je možné rozložit nesouměrnou trojfázovou soustavu ?
   Nesouměrnou trojfázovou soustavu je možno rozložit na tři trojfázové (souměrné) soustavy složkové - **souslednou**, **zpětnou** a **nulovou**.
2. Kvalitu přenosu elektrické energie můžeme posuzovat činitelem nesouměrnosti a činitelem nevyváženosti. Jak jsou tito činitelé definováni ?

Činitel nesouměrnosti je definován jako poměr zpětné složky k sousledné složce

$$\rho = \frac{U_b}{U_a} \text{ resp. } \rho = 100\frac{U_b}{U_a} \; [\%],$$

činitel nevyváženosti je definovaný jako poměr nulové složky k sousledné složce

$$\eta = \frac{U_0}{U_a} \text{ resp. } \eta = 100\frac{U_0}{U_a} \; [\%].$$

7.1.4 Kapitola 5

7.1.4.1 Test předchozích znalostí:

Příklad 5 - 1

Vypočtěte x :

a) $x^2 + x - 6 = 0$, b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ c) $x^2 + 2.10^5 + 1{,}01.10^{12} = 0$

a) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = -1{,}5$, c) $x_1 = -10^5 + j10^6$, $x_2 = -10^5 - j10^6$

Příklad 5 - 2

Vypočtěte y :

a) $y = e^{0,2}$, b) $y = e^{1,2}$, c) $y = e^{3,5}$

a) $y = 1{,}2214$, b) $y = 3{,}3201$, c) $y = 33{,}1154$

Příklad 5 - 3

Vypočtěte y :

a) $y = e^{-0,2}$, b) $y = e^{-0,5}$, c) $y = e^{-2,5}$

a) $y = 0{,}8187$, b) $y = 0{,}6065$, c) $y = 0{,}0621$

Příklad 5 - 4

Vypočtěte y :

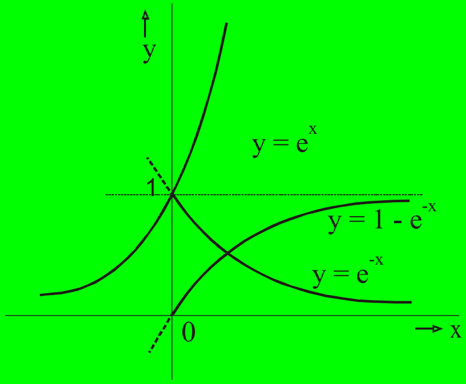
a) $y = 1 - e^{-0,2}$, b) $y = 1 - e^{-1,2}$, c) $y = 1 - e^{-5,2}$

a) $y = 0{,}1813$, b) $y = 0{,}6988$, c) $y = 0{,}9945$

Příklad 5 - 5

Načrtněte graf funkce :

a) $y = e^{x}$, b) $y = e^{-x}$, c) $y = 1 - e^{-x}$



Obrázek 7.1.3 K příkladu 5 - 5

Příklad 5 - 6

Vypočtěte limity funkcí:

a) $y = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1}$, b) $y = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}$, c) $y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1}$

a) y = 0 , b) y = 1 , c) y = ∞

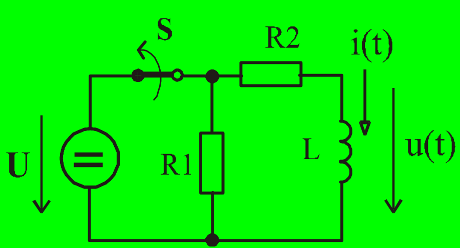
Příklad 5 - 7

Vyjádřete závislost okamžité hodnoty napětí na proudu u :
a) rezistoru , b) kapacitoru , c) induktoru

a) $u(t) = R.i(t)$, b) $u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + u(0_+)$, c) $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

7.1.4.2 Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 5.3

Příklad 5.3-1



Před rozepnutím spínače byl obvod na obrázku v ustáleném stavu. Klasickou metodou (řešením diferenciálních rovnic) odvoďte časový průběh napětí a proudu cívky po rozepnutí spínače, vypočtěte jejich hodnoty v čase t=0-, t=0+,t = 2 ms a t = ∞ , průběhy veličin načrtněte, je - li
U = 30 V, R_1 = 2 k Ω, R_2 = 100 Ω, L = 2H .

Řešení:

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau\frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0 \quad , \quad \text{kde} \quad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = 0{,}9524\ ms$$

$$i(t) = i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = i(0_-)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R_2}e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}3e^{-\frac{t}{9{,}524\cdot 10^{-4}}}A = 0{,}3e^{-1050t}A$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = 2.\ 0{,}3.e^{-1050t}.(-1050) = -630e^{-\frac{t}{9{,}524\cdot 10^{-4}}} = -630e^{-1050t}\quad V$$

t [ms]	0_-	0_+	2	∞
i [A]	0.3	0.3	0.0367	0
u [V]	0	-630	-77,15	0

7.1.4.3 Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 5.5

Příklad 5.5-16

Výpočtem byl určen obraz výstupní veličiny F(p) ve tvaru :

a) $\dfrac{1}{p+a}$, b) $\dfrac{a}{p(p+a)}$, c) $\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$.

Určete originál funkce v časové oblasti f(t).

a) e^{-at} , b) $1-e^{-at}$, c) $\dfrac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$

Příklad 5.5-17

Určete k uvedenému obrazu funkce F(p) originál f(t) pomocí Heavisideova vzorce.

$$F(p)=\frac{10^7}{p^2+2.10^5p+1{,}01.10^{12}}$$

Řešení : $Q_0=10^7$, $P_2'=2p+2.10^5$.

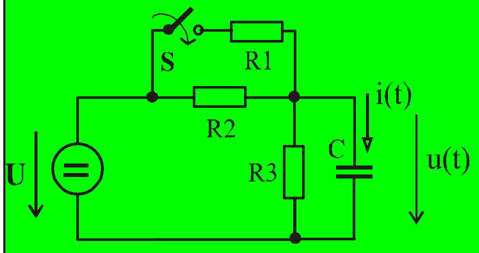
Kořeny jmenovatele jsou komplexně sdružené

$$p_{1,2}=-10^5\pm j10^6 .$$

Proto

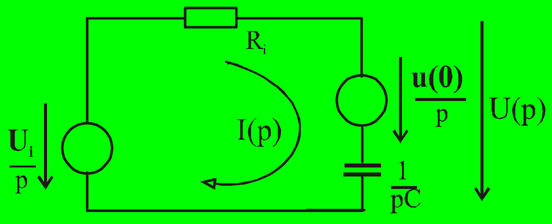
$$f(t)=\frac{10^7}{j2.10^6}e^{-10^5t}e^{j10^6t}+\frac{10^7}{-j2.10^6}e^{-10^5t}e^{-j10^6t}=10e^{-10^5t}\frac{e^{j10^6t}-e^{-j10^6t}}{2j}=10e^{-10^5t}\sin(10^6t)$$

Příklad 5.5-18



Obvod na obrázku byl před sepnutím spínače S v ustáleném stavu. Pomocí Laplaceovy transformace odvoďte časový průběh napětí a proudu kondenzátoru , vypočtěte jejich hodnoty v čase t = 5ms, t =10 ms a t =∞ pro
U = 20 V, R_1 = 2 k Ω , R_2 = 4 k Ω , R_3 = 6 k Ω, C= 10μF

Řešení:



$$u(0_+) = u(0\_) = U\frac{R_3}{R_2 + R_3} = 12\ V$$

$$R_i = R_3 \parallel R_2 \parallel R_1 = 1{,}\overline{09}\ k\Omega$$

$$U_i = U\frac{R_3}{R_3 + R_2 \parallel R_4} = 16{,}\overline{36}\ V$$

$$I(p) = \frac{\dfrac{U_i}{p} - \dfrac{u(0_+)}{p}}{R_i + \dfrac{1}{pC}} = \frac{1}{R_i}\cdot\frac{U_i - u(0_+)}{p + 1/\tau} = \frac{0{,}004}{p + 91{,}\overline{6}} \qquad ,\ \tau = R_i C = 10{,}\overline{90}\ ms$$

$$i(t) = L^{-1}[I(p)] = 0.004e^{-91{,}\overline{6}t}A = 0.004e^{-\frac{t}{10{,}\overline{90}\cdot 10^{-3}}}A$$

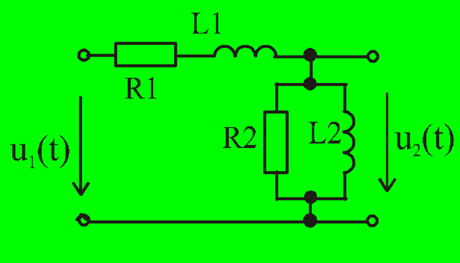
$$U(p) = \frac{U_i}{p} - R_i I(p) = \frac{16{,}\overline{36}}{p} - \frac{4{,}\overline{36}}{p + 91{,}\overline{6}} \quad \text{, nebo také} \quad U(p) = I(p)\frac{1}{pC} + \frac{u(0)}{p}$$

$$u(t) = L^{-1}[U(p)] = 16{,}\overline{36} - 4{,}\overline{36}e^{-91{,}\overline{6}t} = 16{,}\overline{36}(1 - 0{,}2\overline{6}\ e^{-91{,}\overline{6}t})\ V$$

t [ms]	**0**	**5**	**10**	∞
u [V]	12,0	13,6043	14,6188	16,3636
i [mA]	4,0	2,5293	1,5994	0

7.1.4.4 Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 5.6

Příklad 5.6 –3



Pro obvod na obrázku:
a) odvoďte výraz pro činitele přenosu napětí $K_u(p) = U_2(p)/\ U_1(p)$,
b) Vypočtěte průběh přechodné charakteristiky h(t) ,
c) Najděte mezní hodnoty h(t) pro t = 0 a t =∞
jsou –li prvky obvodu : $R_1 = 1000\ \Omega$, $R_2 = 4000\ \Omega$, L1 =1H, $L_2 = 2$ H .

Řešení:

a)

$$K_u(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\dfrac{pL_2R_2}{pL_2 + R_2}}{R_1 + pL_1 + \dfrac{pL_2R_2}{pL_2 + R_2}} = \frac{pL_2R_2}{p^2L_1L_2 + p(L_1R_2 + L_2R_1 + L_2R_2) + R_1R_2}$$

b)

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{K_u(p)}{p}\right] = L^{-1}\left[\frac{L_2R_2}{p^2L_1L_2 + p(L_1R_2 + L_2R_1 + L_2R_2) + R_1R_2}\right] = L^{-1}\left[\frac{8000}{2p^2 + 14000p + 4000000}\right] =$$

$$= \underline{\underline{0.6247\left(e^{-298,44t} - e^{-6701,6t}\right)}}$$

c)

$h(0_+) = 0$, $h(\infty) = 0$

7.1.5 Kapitola 6

7.1.5.1 Test předchozích znalostí:

Příklad 6 -1

a) Efektivní hodnota napětí je U=120 V, jaká je hodnota amplitudy U_m ?

b) Amplituda proudu je I_m =2,1 A, jaká je efektivní hodnota proudu I ?

a) U=150,0 [V], $U_m = \sqrt{2}$ .120 = 169,7056 [V],

b) I_m =2,1[A], I= (1/$\sqrt{2}$) .2,1=1,4849 [A].

Příklad 6 - 2

Vypočtěte x :

a) $x^2 + x - 6 = 0$, b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ c) $x^2 + 2.10^5 + 1{,}01.10^{12} = 0$

a) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = -1{,}5$, c) $x_1 = -10^5 + j10^6$, $x_2 = -10^5 - j10^6$

Příklad 6 - 3

Vypočtěte y :

a) $y = e^{0,3}$, b) $y = e^{-0,6}$, c) $y = e^{2,5}$

a) y = 1,3499, b) y = 0,5488, c) y = 12,1825

Příklad 6 - 4

Vypočtěte parciální derivace :

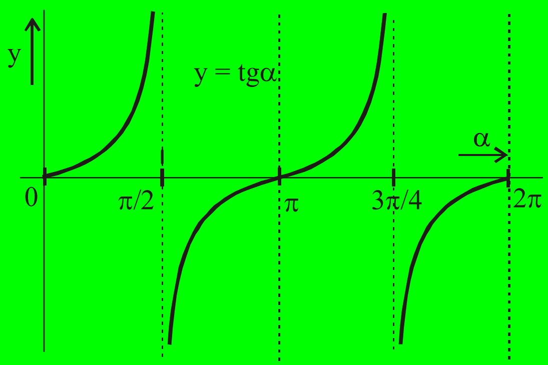
a) $\frac{\partial}{\partial t}\left[x^2 + t^2\right]$, b) $\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 + t^2\right]$, c) $\frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2t + t^2\right]$, d) $\frac{\partial}{\partial t}\left[2x^2t + t^2\right]$

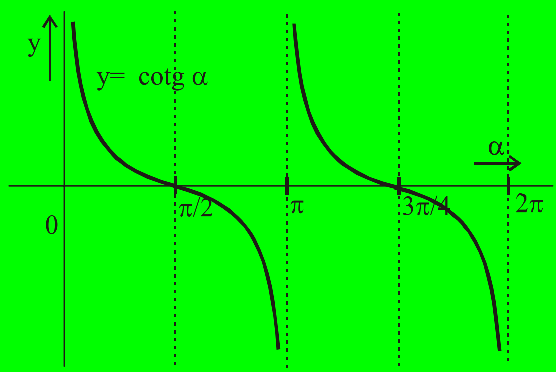
a) 2t, b) 2x , c) 4xt, d) $2x^2 + 2t$

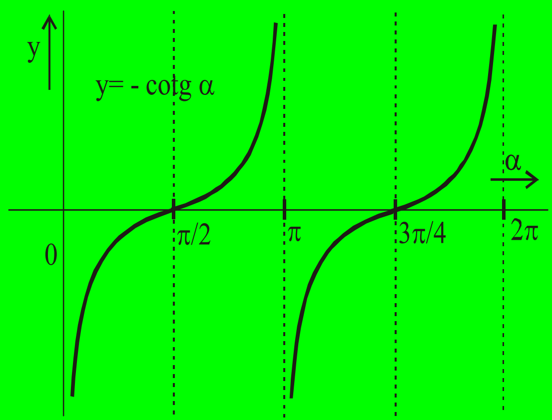
Příklad 6 - 5

Načrtněte graf funkce :

a) y = tgα , b) y = cotgα , c) y = - cotgα







Obrázek 7.1.4 K příkladu 6-5

7.1.5.2 <u>Výsledky kontrolních otázek a příkladů podkapitoly 6.4</u>

Příklad 6.4 –1

Jaké hodnoty nabývá činitel odrazu ρ pro :

a) $\mathbf{Z}_2 = 0$, b) $\mathbf{Z}_2 = \infty$,c) $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_v$

Řešení :

Protože

$$\rho\ (j\omega) = \frac{\mathbf{Z}_2(j\omega) - \mathbf{Z}_v(j\omega)}{\mathbf{Z}_2(j\omega) + \mathbf{Z}_v(j\omega)}, \qquad \text{a) } \rho = -1\text{ , b) } \rho = 1\text{ , c) } \rho = 0\ .$$

Příklad 6.4 –2

Definujte primární a sekundární parametry vedení:

Řešení :

V náhradním schématu elementárního úseku vedení vystupují v podélném směru **primární parametry vedení: $\mathbf{R_0}$** (podélný měrný odpor), $\mathbf{L_0}$ (podélná měrná indukčnost), v příčném směru pak $\mathbf{G_0}$ (příčná měrná vodivost), $\mathbf{C_0}$ (příčná měrná kapacita), které jsou dány konstrukčním provedením vedení.

Sekundární parametry vedení jsou :

charakteristická impedance $\mathbf{Z}_v$ a konstanta šíření γ :

$$\mathbf{Z}_v(j\omega) = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad , \quad \gamma(j\omega) = \beta + j\alpha = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

Příklad 6.4 –3

Homogenní vedení s primárními parametry G_0 = 0 [S/m], R_0 = 55 [mΩ/m], C_0 = 100 [pF/m], L_0 = 0,25 [μH /m] o délce l = 50 m pracuje na kmitočtu f =250 MHz , je zatíženo vlnovou impedancí $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_V$.

Vypočtěte : a) sekundární parametry vedení (γ, $\mathbf{Z}_V$), délku vlny na vedení λ ,

b) vstupní napětí a vstupní proud, je-li napětí na výstupu

$u_2(t) = U_{2m}\sin(\omega t+\psi_u) = \sqrt{2}\ .\ 50 \sin(\omega t)$ [V]

Řešení :

a) $\hat{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = (5.5000 \cdot 10^{-4} + j7.8540) m^{-1}$

$$\hat{Z}_v = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = (50.000 - j3.5014 \cdot 10^{-3})\ \Omega = 50.000\angle -0.00401^\circ\ \Omega$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\mathrm{Im}[\hat{\gamma}]} = 0.8000 m$$

b) $\hat{U}_2 = 50\angle 0^\circ\ V$;

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \cosh \hat{\gamma} l + \hat{I}_2 \hat{Z}_v \sinh \hat{\gamma} l = \hat{U}_2(\cosh \hat{\gamma} l + \sinh \hat{\gamma} l) = \hat{U}_2 e^{\hat{\gamma} l} = (-51.394 - j4.956 \cdot 10^{-5}) V =$$
$$= 51.394\angle -180.0^\circ\ V$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_v} = (-1.0279 - j7.2971 \cdot 10^{-5}) A = 1.0279\angle -180.0^\circ\ A$$

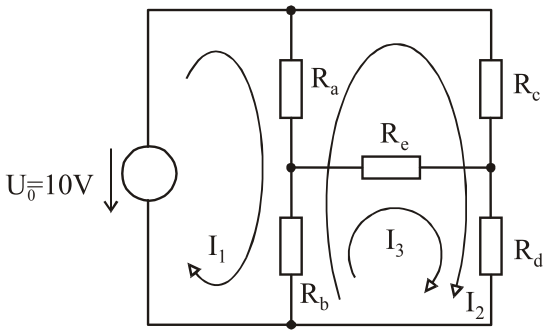
$$u_1(t) = \sqrt{2} \cdot 51.394 \sin(\omega t - 180.0^\circ) V = 72.682 \sin(\omega t - 180.0^\circ) V$$
$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 1.0279 \sin(\omega t - 180.0^\circ) A = 1.4536 \sin(\omega t - 180.0^\circ) A$$

7.2 Přílohy

V Příloze jsou uvedeny tři programy, které mohou být užitečné při řešení elektrických obvodů na počítači. Jde o jednoduché programy v jazyku PASCAL, které nejsou náročné na rozsah paměti počítače a nekladou přílišné nároky na použitou verzi překladače. Vstupní data jsou ve všech případech zadávána ve formě konstant na začátku programu. To, že program musíme vždy po zadání nového příkladu znovu zkompilovat, nepůsobí potíže, protože kompilace je ukončena během několika sekund. Výhodné však je, že zadání je přehledné, snadno kontrolovatelné a dovoluje provádět modifikace.

Příloha 1 Řešení soustavy lineárních rovnic s reálnými koeficienty metodou Gaussovy eliminace

Program je určen např. pro řešení rovnic rezistorového lineárního obvodu při použití metody smyčkových proudů nebo uzlových napětí. Jako příklad jsou v programu uvedena data, odpovídající jednoduchému můstku, popsanému rovnicemi smyčkových proudů. Schéma je na obr.P.1-1. Hodnoty odporů Ra, Rb a Re jsou pevné, odpory Rc a Rd jsou části potenciometru o celkovém odporu 10 kΩ. Nastavení běžce je dáno parametrem m (v programu je m nastaveno na 0.3).



R_a = 4,5 kΩ

R_b = 8,7 kΩ

R_c = 3,0 kΩ

R_d = 7,0 kΩ

R_e = 1,0 kΩ

Obr P.1-1 : Jednoduchý můstek jako příklad pro použití programu LINROV

```
program linrov;  (* reseni soustavy linearnich rovnic *)
const
  n = 3;  (* pocet rovnic *)
type
   vek = array[1..n] of real;
   mat = array[1..n,1..n+1] of real;
const
  (* odporovy mustek s potenciometrem *)
  m = 0.3;  (* Rc = 3k, Rd = 7k *)
  (* rovnice pro smyckove proudy, vysledky v mA *)
  a : mat = (( 13.2,  -13.2,         -8.7,         10),
             (-13.2,   23.2,          8.7+10*(1-m), 0),
             (-8.7,    8.7+10*(1-m),  9.7+10*(1-m), 0));
```

```
var
   i,j  : integer;
   det  : real;
   x    : vek;

procedure Gauss(n:integer;a:mat;var x:vek;var dd:real);
(* reseni linearnich rovnic metodou Gaussovy eliminace
   s castecnou pivotaci
   n  je pocet rovnic
   a  je matice soustavy n*n+1
      v poslednim sloupci vektor pravych stran
   x  je vektor neznamych
   dd je hodnota determinantu matice *)
var
   n1,i,j,k,j1: integer;
   t1,t2      : real;
begin
  n1:=n+1;
  for j:=1 to n do
    begin
      j1:=j+1;  if j<n then
        begin
          t1:=abs(a[j,j]);   i:=0;  (* hledani nejvetsiho
                                                 prvku *)
          for k:=j1 to n do
            begin
              t2:=abs(a[k,j]);  if t2>t1 then
                begin  t1:=t2;  i:=k;  end;
            end;
          if i>0 then
            for k:=1 to n1 do   (* zamena radku *)
              begin  t1:=a[i,k];  a[i,k]:=a[j,k];
                     a[j,k]:=t1;  end;
        end;
      t2:=a[j,j];  (* pivot *)
      for k:=1 to n do
        begin
          if k<>j then
            begin
              t1:=a[k,j]/t2;  if t1<>0 then
              for i:=j1 to n1 do a[k,i]:=a[k,i]-t1*a[j,i];
            end;
        end;
    end;
  dd:=1;
  for j:=1 to n do   (* zpetna substituce a vypocet
                                      determinantu *)
    begin  t1:=a[j,j];  x[j]:=a[j,n1]/t1;  dd:=dd*t1;  end;
end;

(* vlastni ridici program *)
```

```
begin
   Gauss(n,a,x,det);    (* volani procedury Gauss *)
   for i:=1 to n do write(x[i]:13,'    ');
   writeln;
   writeln(det:13);
   readln;
end.
```

Výsledné hodnoty jsou
x[1]=I_1=1,760335 mA, x[2]=I_2=1,047209 mA, x[3]=I_3=-0,06744099 mA.

Příloha 2 Řešení soustavy lineárních rovnic s komplexními koeficienty metodou Gaussovy eliminace

Program je určen např. k řešení lineárních setrvačných obvodů v ustáleném stavu pomocí symbolického počtu. Jako příklad je uvedeno řešení vazebního článku RC z obr.5.3-10. Parametry obvodu jsou konstantní, může se však měnit kmitočet, označený v programu identifikátorem fr. (V programu je fr nastaveno na 1000 Hz).

```
program komrov;
(* reseni soustavy linearnich rovnic s komplexnimi koeficienty
metodou Gaussovy eliminace *)
const
  n = 2;                             (* pocet rovnic *)
  R1 = 1680;    C1 = 0.235e-6;       (* parametry obvodu *)
  R2 = 12e3;    C2 = 10e-9;
  fr = 1000;                         (* kmitocet *)
  pi = 3.1415926536;
type
   mat = array[1..n,1..n+1] of real;
   vek = array[1..n] of real;
const
   yr:mat = (( 1/R1,        0,                1/R1),
             ( 0,           1/R2,             0));
   yi:mat = (( 2*pi*fr*C1, -2*pi*fr*C1,       0),
             (-2*pi*fr*C1,  2*pi*fr*(C1+C2), 0));
var
   i     : integer;
   xr,xi : vek;          (* vektor neznamych *)
   dr,di : real;         (* determinant *)

procedure Gaussk(n:integer;yr,yi:mat;
                 var xr,xi:vek;var dr,di:real);

procedure cmult(a,b,c,d:real;var e,f:real);
(* nasobeni komplexnich cisel  e+jf = (a+jb)*(c+jd)   *)
```

```
begin
  e:=a*c-b*d;   f:=a*d+b*c;
end;

procedure cdiv(a,b,c,d:real;var e,f:real);
(* deleni komplexnich cisel  e+jf = (a+jb)/(c+jd)  *)
begin
   f:=c*c+d*d;   e:=(a*c+b*d)/f;   f:=(b*c-a*d)/f;
end;

var
   n1,j,j1,ii,k : integer;
   a,b,e,f      : real;

begin
  n1:=n+1;
  for j:=1 to n do
    begin
      j1:=j+1;
      if j<n then
        begin
          a:=abs(yr[j,j])+abs(yi[j,j]);  ii:=0;
          for k:=j1 to n do
            begin
              b:=abs(yr[k,j])+abs(yi[k,j]);
              if b>a then  begin  a:=b; ii:=k;  end;
            end;
          if ii>0 then
            for k:=1 to n1 do
              begin
                a:=yr[ii,k];  b:=yi[ii,k];
                yr[ii,k]:=yr[j,k];
                yi[ii,k]:=yi[j,k];  yr[j,k]:=a;
                yi[j,k]:=b;
              end;
        end;
      for k:=1 to n do
        begin
          if k<>j then
            begin
              a:=yr[k,j];  b:=yi[k,j];
              if abs(a)+abs(b)>0 then
                begin
                  cdiv(a,b,yr[j,j],yi[j,j],a,b);
                  for ii:=j1 to n1 do
                    begin
                      cmult(a,b,yr[j,ii],yi[j,ii],e,f);
                      yr[k,ii]:=yr[k,ii]-e;
                      yi[k,ii]:=yi[k,ii]-f;
                    end;
                end;
```

```
            end;
        end;
    end;
    dr:=1;  di:=0;
    for j:=1 to n do
      begin
        a:=yr[j,j];   b:=yi[j,j];
        cdiv(yr[j,n1],yi[j,n1],a,b,xr[j],xi[j]);
        cmult(dr,di,a,b,dr,di);
      end;
end;
end;
                end;
            end;
        end;
    end;
    dr:=1;  di:=0;
    for j:=1 to n do
      begin
        a:=yr[j,j];   b:=yi[j,j];
        cdiv(yr[j,n1],yi[j,n1],a,b,xr[j],xi[j]);
        cmult(dr,di,a,b,dr,di);
      end;
end;

begin  (* ridici program *)
  Gaussk(n,yr,yi,xr,xi,dr,di);
  for i:=1 to n do writeln(i:3,'  ',xr[i]:12,'  ',xi[i]:12);
  writeln(dr:12,'  ',di:12);
  readln;
end.
```

Výsledné hodnoty uzlových napětí pro f_r=1000Hz jsou:

U_1=0.878115-j0.0841996 [V], U_{C2} = 0.844171-j0.0350643[V].

Příloha 3 Řešení soustavy diferenciálních rovnic v normálním tvaru metodou Rungeho a Kutty 2. řádu

Program řeší soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu, např. soustavu stavových rovnic ve tvaru (5.4-1). Ve vstupních datech musí být uvedeny hodnoty tmin, tmax, nt a nn a počáteční hodnoty proměnných. V proceduře DIFR musí být rovnice zapsány ve tvaru výrazů dx/dt=f(x,t). Jako příklad je uvedeno řešení přechodného děje ve vazebním článku RC z obr.5.3-10 při zadaných počátečních podmínkách u_{C10}=1V, u_{C20}=-3V.

Diferenciální rovnice mají tvar

$$\frac{du_{C1}}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1}(\ u_{C1} + u_{C2}\ )\ , \qquad \frac{du_{C2}}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} u_{C1} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} u_{C2}$$

Parametry obvodu jsou R_1 = 1680 Ω, C_1 = 0,235μF, R_2 = 12 kΩ, C_2 = 10 nF.

```
program runge;
const
  tmin = 0;        (* pocatek intervalu reseni *)
  tmax = 500e-6;   (* konec intervalu reseni *)
  nt = 101;        (* celkovy pocet bodu reseni *)
  nn = 2;          (* pocet rovnic *)
type
  vek = array[1..nn] of real;
const
  x : vek = (1,-3);     (* pocatecni podminky *)
var
  h,t   : real;
  i,j,k   : integer;

procedure RKG(nn:integer;h:real;var t:real;var x:vek);
(* algoritmus Runge-Kutta-Gill 2. radu *)
const
  ca=1.7071067;   cb=0.2928933;
var
  dx,q  : vek;
  q1,q2 : real;
  i     : integer;

procedure difr;
(* vypocet levych stran dif. rovnic v normalnim tvaru *)
begin
  dx[1]:=-2532.928*(x[1]+x[2]);
  dx[2]:=-59523.8*x[1]-67857.1*x[2];
end;

begin
(* vlastni algoritmus *)
  difr;
  for i:=1 to nn do
    begin   q1:=0.5*h*dx[i];   x[i]:=x[i]+q1;   q[i]:=2*q1;   end;
  t:=t+0.5*h;
  difr;
  for i:=1 to nn do
    begin   q1:=h*dx[i];   q2:=q1-q[i];   x[i]:=x[i]+cb*q2;
            q[i]:=q[i]+3*cb*q2-cb*q1;   end;
  difr;
  for i:=1 to nn do
    begin   q1:=h*dx[i];   q2:=q1-q[i];   x[i]:=x[i]+ca*q2;
            q[i]:=q[i]+3*ca*q2-ca*q1;   end;
  t:=t+0.5*h;
  difr;
  for i:=1 to nn do
    begin   x[i]:=x[i]+h*dx[i]/6-q[i]/3;   end;
```

```
end;

(* ridici program *)
begin
  h:=(tmax-tmin)/(nt-1);
  t:=tmin;       writeln;
  for i:=0 to nt-1 do
    begin
      if i>0 then RKG(nn,h,t,x);  write(t:12,'  ');
      for j:=1 to nn do write(x[j]:12,' ');  writeln;
      if (i mod 20=0) or (i=nt-1) then readln;
    end;
end.
```

Některé výsledky:

t [μs]	u_{C1} [V]	u_{C2} [V]
0	1,000	-3,000
10	1,036	-1,964
20	1,052	-1,448
50	1,059	-0,996
100	1,045	-0,923

Seznam použité literatury

[1] Valsa,J., Sedláček,J.: Teoretická elektrotechnika I. Nakladatelství VUTIUM, VUT Brno, Brno 1998.

[2] Valsa,J., Sedláček,J.: Teoretická elektrotechnika II. Nakladatelství VUTIUM, VUT Brno, Brno 2002.

[3] Čajka,J., Kvasil,J.: Teorie lineárních obvodů. SNTL, Alfa Praha,
1979.

[4] Mayer,D.: Úvod do teorie elektrických obvodů SNTL-ALFA Praha,
1978

[5] Mikulec, M.,Havlíček,V.: Základy teorie elektrických obvodů 1.,
ČVUT Praha, 1999

[6] Mikulec, M.,Havlíček,V.: Základy teorie elektrických obvodů 2.,
ČVUT Praha, 1998.

[7] Irwin, J.D.: Basic Engineering Circuits Analysis Macmillan
Publishing Company, New York, 1987

[8] Ditkin, V. A - Kuzněcov, P. I : Příručka operátorového počtu, Praha,
NČSAV 1954.

[9] Vlach, J., Singhal, K,: Computer Methods for Circuit Analysis and Design, 2. vydání, nakl. Van Nostrand Reinhold, New York 1994.

[10] Zakian, V.: Optimisation of Numerical Inversion of Laplace Transforms, Electronics Letters 6 (1970), 677 - 679.

[11] Vlach, J.: Basic Network Theory with Computer Applications Van
Nostrand Reinhold, NewYork, 1992.